epsilon
7

Łatwe czy trudne?

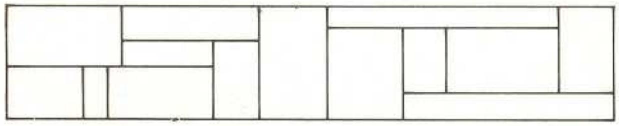
Przywykliśmy do tego, że *zazwyczaj* zadania matematyczne o prostym sformułowaniu mają proste rozwiązania. Również i na odwrót: zadania, które mają skomplikowane sformułowania, w których występują skomplikowane pojęcia, *zazwyczaj* mają skomplikowane rozwiązania. Tak jest *zazwyczaj*, ale czy zawsze?

Dziś pragnę przedstawić zadanie, mające proste sformułowanie, i jego rozwiązanie. Rozwiązanie krótkie, ale wykorzystujące nieelementarne fakty z matematyki wyższej. Po kolei jednak. Zacznijmy od zadania.

Prostokąt P dzielimy na skończoną liczbę mniejszych prostokątów (w ten sposób, że dowolne dwa z nich mogą zahaczać o siebie jedynie bokami – porównaj z rysunkiem). Załóżmy, że każdy z mniejszych prostokątów ma przynajmniej jeden bok o długości będącej liczbą całkowitą. Udowodnić, że prostokąt P ma bok o długości będącej liczbą całkowitą.

Jedyne rozwiązanie, jakie znam, opiera się na pojęciu całki podwójnej i to z funkcji o wartościach zespolonych. Nie wnikając w szczegóły (które jednym Czytelnikom mogą się wydać zbyt trudne, a innym zbyt nudne) ograniczę się do dwóch informacji, które posłużą mi do przedstawienia rozwiązania zadania. Komplet wiadomości na ten temat można znaleźć w podręcznikach akademickich analizy matematycznej (np. F. Leja *Rachunek różniczkowy i całkowy*).

Całka podwójna jest uogólnieniem „zwykłej" całki na funkcje dwóch zmiennych. Jeżeli uznamy, że obliczenie „zwykłej" całki polega na wyznaczaniu pól pewnych figur płaskich, to obliczeniu całki podwójnej odpowiadać będzie wyznaczanie objętości pewnych obszarów przestrzennych. A oto zapowiadane informacje (pierwsza z nich wydaje się intuicyjnie uzasadniona, natomiast druga wygląda groźniej).



(1) Jeżeli P jest prostokątem oraz $P = P_1 \cup \ldots \cup P_m$ jest podziałem tego prostokąta na skończoną liczbę mniejszych prostokątów, a $f : P \to \mathbf{C}$ jest funkcją ciągłą o wartościach zespolonych, to

$$\iint\limits_P f\,dx\,dy = \sum_{k=1}^{m} \iint\limits_{P_k} f\,dx\,dy\,.$$

(2) Jeżeli P jest prostokątem o wierzchołkach w punktach (x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_2, y_2), to

$$\iint\limits_P [\cos 2\pi(x+y) + i \sin 2\pi(x+y)]dxdy =$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2}[\cos 2\pi x_2 - \cos 2\pi x_1 + i(\sin 2\pi x_2 - \sin 2\pi x_1)]\cdot$$
$$\cdot[\cos 2\pi y_2 - \cos 2\pi y_1 + i(\sin 2\pi y_2 - \sin 2\pi y_1)]\,.$$

Z własności (2) wynika, że prostokąt P ma bok o długości będącej liczbą całkowitą wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\iint\limits_P (\cos 2\pi(x+y) + i \sin 2\pi(x+y))dxdy = 0\,.$$

Teraz już twierdzenie zawarte w zadaniu jest prostą konsekwencją własności (1).

Być może zadanie to ma rozwiązanie elementarne, a tylko mnie nie udało się do tej pory takiego rozwiązania znaleźć. Dokładniej mówiąc, nie tylko mnie, ale również wielu innym; zadanie interesowało wiele osób, a nie wiem o nikim, kto potrafiłby je zrobić bardziej elementarnie. W czasie pewnej międzynarodowej konferencji matematycznej było tematem wielu dyskusji kuluarowych.

Bardzo często młodzi i pomysłowi ludzie, nieobciążeni skomplikowaną wiedzą matematyczną, wykazują się wielką pomysłowością przy rozwiązywaniu problemów matematycznych (jako przykład niech posłuży zadanie o izometrii – porównaj *EPSILON* nr 1 – którego nie potrafiło rozwiązać wielu zawodowych matematyków, a które rozwiązał student I roku). Może komuś z Czytelników uda się znaleźć elementarne rozwiązanie tego zadania. Jeśli tak, redakcja *EPSILONA* będzie wdzięczna za przysłanie.

Sławomir CYNK

Galeria Jednego Cytatu

– Oto przykład przestrzeni, która z jednej strony wygląda przyzwoicie, a z drugiej...

(z wykładu analizy funkcjonalnej)

O wybitnym, nieżyjącym już fizyku krakowskim znana jest autentyczna podobno historia.

W latach pięćdziesiątych, gdy o zezwolenie na wyjazd za granicę było nieco trudniej niż dziś, profesorowi wraz z asystentem udało się wyjechać na zagraniczną konferencję. Do Moskwy. Zakwaterowano ich w hotelu.

Gdy tylko weszli do hotelowego pokoju, profesor stwierdził:

– Tu gdzieś musi być podsłuch!

Zaczęli intensywnie szukać podsłuchu, na ścianach, w meblach, łóżkach, jednakże bezskutecznie.

– Zwijamy dywan! – zdecydował profesor.

Po zwinięciu dywanu ujrzeli na środku pokoju metalową płytę, przymocowaną do podłogi pięcioma potężnymi śrubami. Profesor miał w kieszeni marynarki rozmaite pióra, ołówki itp.; znalazł się tam i śrubokręt. Zaczęli zatem odkręcać płytę. Odkręcili pierwszą śrubę, drugą, trzecią... Gdy odkręcili piątą, rozległ się ogromny huk.

W pokoju piętro niżej spadł żyrandol.

EPSILON – niezależny dodatek *Delty*. Redakcja: Krzysztof Ciesielski (naczelny), Danuta Ciesielska, Sławomir Cynk, Zdzisław Pogoda, Ananiasz Pośmiechowski. Adres do korespondencji: K. Ciesielski, Instytut Matematyki UJ, Reymonta 4, 30-059 Kraków, z dopiskiem ε.