epsilon

Jeden krok w przód, kilka do tyłu...

Świetnie znana ze szkoły *zasada indukcji matematycznej* mówi, że jeśli w twierdzeniu o liczbach naturalnych spełnione są dwa warunki:

1) twierdzenie prawdziwe jest dla n_0,
2) z prawdziwości twierdzenia T_k wynika prawdziwość twierdzenia $T_{k+1} (\forall k \geq n_0)$, to twierdzenie T_n prawdziwe jest dla dowolnego n większego lub równego n_0.

Zasada ta ma wiele odmian (np. gdy pokazujemy implikację $T_k \Rightarrow T_{k+2}$, pierwszy krok trzeba wtedy sprawdzić dla dwóch kolejnych liczb). Chciałbym tu przedstawić jedną z rzadziej spotykanych odmian indukcji, tzw. indukcję wsteczną.

Jej główna myśl polega na zastąpieniu implikacji $T_k \Rightarrow T_{k+1}$ implikacją $T_k \Rightarrow T_{k-1}$. Niekiedy jest to znacznie łatwiejsze niż postępowanie zgodne ze „zwykłą" zasadą indukcji. Przykładem twierdzenia, dla którego tak jest, jest nierówność Cauchy-Riemanna (między średnią arytmetyczną a geometryczną).

Jeżeli $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *są liczbami rzeczywistymi dodatnimi, to*

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}.$$

Udowodnić tę nierówność za pomocą „zwykłej" indukcji nie jest łatwo. Natomiast nietrudno jest wykazać, że z prawdziwości twierdzenia dla n wynika prawdziwość twierdzenia dla $n-1$.

Niech bowiem $a_1, \ldots, a_{n-1}$ będą liczbami dodatnimi. Przyjmijmy

$$a_n := \sqrt[n-1]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}}.$$

Korzystając z prawdziwości twierdzenia dla n możemy napisać:

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n}.$$

Wiemy, że $a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} = a_n^{n-1}$, czyli $\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_n^{n-1} \cdot a_n} = a_n$, co po prostych przekształceniach daje nam żądaną nierówność.

Oczywiście, taka indukcja wsteczna nie dowodzi prawdziwości twierdzenia dla dowolnej liczby naturalnej, a jedynie tego, że jeżeli twierdzenie jest prawdziwe dla pewnej liczby naturalnej, to i dla wszystkich liczb od niej mniejszych. Możemy więc wykonywać drobne kroczki do tyłu. Potrzebna nam jest jeszcze możliwość robienia dużych kroków w przód, czyli wykazanie, że istnieją dowolnie duże liczby naturalne, dla których twierdzenie jest prawdziwe. W naszym przypadku najłatwiej jest sprawdzić implikację $T_n \Rightarrow T_{2n}$. Nie możemy jednak zapomnieć o pierwszym kroku – sprawdźmy zatem prawdziwość twierdzenia dla $n = 2$.

– To wszystko bardzo ciekawe, Pitagorasie, ale czy dzięki temu znajdę jakąś pracę?

J.H. Webb

Niech a_1, a_2 będą liczbami dodatnimi. Wiemy, że $(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0$, czyli po prostych przekształceniach $a_1 + a_2 \geq 2\sqrt{a_1, a_2}$, a to po podzieleniu przez 2 daje żądaną nierówność.

Załóżmy teraz, że twierdzenie jest prawdziwe dla pewnej liczby n. Zbadamy jego prawdziwość dla liczby $2n$.

Niech $a_1, \ldots, a_{2n}$ będą liczbami dodatnimi. Przyjmijmy $b_k = \frac{a_{2k-1} + a_{2k}}{2}$, $c_k = \sqrt{a_{2k-1} \cdot a_{2k}}$, dla $k = 1, 2, \ldots, n$. Wiemy, że $c_k \leq b_k$ dla $k = 1, \ldots, n$.

Zauważmy, że $\sqrt[2n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_{2n}} = \sqrt[n]{c_1 \cdot \ldots \cdot c_n}$. Ponieważ twierdzenie jest prawdziwe dla n, więc $\sqrt[n]{c_1 \cdot \ldots \cdot c_n} \leq \frac{c_1 + \ldots + c_n}{n}$. Zatem podsumowując otrzymujemy

$$\sqrt[2n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_{2n}} \leq \frac{c_1 + \ldots + c_n}{n} \leq$$

$$\leq \frac{b_1 + \ldots + b_n}{n} = \frac{a_1 + \ldots + a_{2n}}{2n},$$

a to chcieliśmy wykazać.

Dokładne wykazanie, że z poczynionych uwag wynika prawdziwość twierdzenia, pozostawiamy dociekliwemu Czytelnikowi. Zauważmy, że drugą część dowodu można poprowadzić w inny sposób; zamiast wykazywać, że z prawdziwości twierdzenia dla n wynika prawdziwość twierdzenia dla $2n$, wystarczy wykazać, że z prawdziwości twierdzenia dla n wynika prawdziwość twierdzenia dla jakiejkolwiek liczby naturalnej większej od n (np. dla $n + 5, 17n^3 + 26n^2 + 32$ czy $n! + 1991$).

Indukcję wsteczną można stosować do dowodu wielu innych twierdzeń. Może Czytelnikom uda się znaleźć jakieś ciekawe przykłady?

Sławomir CYNK

EPSILON – niezależny dodatek *Delty*. Redakcja: Krzysztof Ciesielski (naczelny), Danuta Ciesielska, Sławomir Cynk, Zdzisław Pogoda, Ananiasz Pośmiechowski. Adres do korespondencji: K. Ciesielski, Instytut Matematyki UJ, Reymonta 4, 30-059 Kraków, z dopiskiem ϵ.