Dwa zegarki i całkiem poważna fizyka

Paweł KRAWCZYK

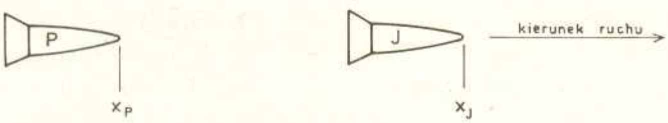
Częstym elementem filmów sensacyjnych jest scena nastawiania zegarków na tę samą godzinę, czyli, jak mówimy fachowo, ich synchronizacji. Gdy wszyscy posiadacze zegarków znajdują się razem, jest to dziecinnie proste. Czy można jednak całkowicie zsynchronizować dwa zegarki odległe od siebie? Aby odpowiedzieć na to pytanie, wczujmy się w rolę pilotów kosmicznych, bliźniaków Jacka i Placka, siedzących za sterami swych rakiet, znajdujących się na przeciwległych krańcach rozległego kosmodromu. Dostali oni odpowiedzialne zadanie doświadczalnego sprawdzenia szczególnej teorii względności. Nasi piloci mają wystartować dokładnie w tym samym momencie i utrzymując cały czas szyk liniowy (rakieta Jacka z przodu, rakieta Placka dokładnie za nią – patrz rysunek) i stałą odległość lecieć pełną mocą silników przez 24 godziny czasu pokładowego. Po wyłączeniu silników bracia mają porównać wskazania swych zegarków. Zakładamy, że ruch z włączonymi silnikami odbywa się z przyspieszeniem, po ich wyłączeniu zaś ze stałą prędkością. Zadanie wydawało się trywialne: cóż prostszego jak utrzymać stałą odległość, gdy dysponuje się, jak na bliźniaków przystało, identycznymi rakietami. Ale, o zgrozo, bracia wykryli podczas radiowej pogawędki tuż przed startem, że zegarek Jacka pokazuje 11 : 29, a Placka – 11 : 30.

– Nastaw swój zegarek na 11 : 30, Jacku – powiedział Placek – i wszystko będzie w porządku.

– To na nic – odpowiedział Jacek – nasza rozmowa przenoszona jest przez fale radiowe, które potrzebują trochę czasu, aby dotrzeć od ciebie do mnie. W ten sposób mój zegarek wskazywałby zawsze nieco wcześniejszą godzinę niż twój.

– Ech – westchnął Placek – gdyby było więcej czasu, po prostu przyszedłbym do ciebie i łatwo moglibyśmy zsynchronizować nasze zegarki.

– Zapominasz, że czas płynie inaczej w poruszających się układach odniesienia. Wracając do swojej rakiety popsułbyś synchronizację.



W tym momencie Jacek uświadomił sobie, że pomysł Placka ze spacerem nie był taki zły. Trzeba tylko, żeby Placek zostawił swój zegarek i w momencie wyjścia rzucił nań okiem.

– Podróż do mnie – pomyślał Jacek – zajęłaby mu czas Δt i z powrotem tyle samo. Wystarczyłoby, żeby będąc u mnie zapamiętał wskazanie mojego zegarka, a po powrocie do siebie sprawdził, ile czasu trwała ta wyprawa. Powinien natychmiast nastawić swój zegarek na zapamiętaną godzinę plus połowa czasu trwania wycieczki. Tak, to jest właśnie to.

Jacek natychmiast wyjaśnił swoje rozumowanie Plackowi:

– Wprawdzie nie ma czasu na spacery, ale możemy załatwić to za pomocą światła. Ma to tę dodatkową zaletę, że w dowolnym układzie odniesienia światło porusza się zawsze ze stałą prędkością i czas jego przejścia od ciebie do mnie i z powrotem będzie na pewno taki sam. Wyślij więc do mnie impuls światła, a ja go

Geometria czasoprzestrzeni

Marek KORDOS

Współcześni twierdzili, że Einstein był miernym, żeby nie powiedzieć marnym, matematykiem. Było to paradoksalne, albowiem od niego właśnie pochodzi koncepcja, że struktura fizyki teoretycznej, nowoczesnej fizyki teoretycznej, jest taka sama jak struktura matematyki. Pojęcia, jakimi zajęła się fizyka teoretyczna przełomu stuleci, mają matematyczny charakter, są bowiem niezmienne – twierdził Einstein. Fizyka zaczęła zajmować się wtedy cząsteczkami, atomami, cząstkami elementarnymi. Cząsteczki, powiedzmy, wody są jednakowe tak bardzo, jak mogą jednakowe być tylko np. trójkąty równoboczne. Co więcej, po rozbiciu ich na części i ponownym połączeniu otrzymamy dokładnie to, co było na początku. Pozwala to na konstruowanie idealnie ścisłych (a nie tylko w przybliżeniu, jak było dotąd) modeli matematycznych. Einstein utożsamia model matematyczny z teorią fizyczną. Fizyka teoretyczna staje się tym samym specyficzną gałęzią matematyki.

Nic więc dziwnego, że gdy Einstein sformułował teorię oddziaływań ciał poruszających się, zwaną szczególną teorią względności, sprawę znalezienia dla niej odpowiedniego modelu matematycznego uznał za pierwszoplanową. Jednak różni, „pożyczani" przeważnie od Hilberta, młodzi asystenci-matematycy traktowali współpracę z Einsteinem jak pańszczyznę i nie należało się spodziewać po nich, że to oni potrzebny model skonstruują. W Getyndze, gdzie Einstein (pracujący w biurze patentowym w Zurichu) szukał partnerów naukowych, działał 15 lat starszy od Einsteina wybitny geometra Herman Minkowski. Einstein był zresztą studentem Minkowskiego na politechnice w Zurichu. I właśnie Minkowskiego potrafił Einstein pozyskać dla idei poszukiwania modelu matematycznego dla szczególnej teorii względności.

Kształt zaproponowanego przez Minkowskiego modelu matematycznego staje się bardziej zrozumiały, gdy przyjrzeć się koncepcjom, jakie poprzednio Minkowski lansował.

Największą popularność i znaczenie miały tzw. metryki Minkowskiego. Są to sposoby mierzenia odległości w przestrzeni afinicznej, to znaczy uogólnienia euklidesowego sposobu mierzenia odległości, ale takie, które nie powodują zmiany liniowej struktury przestrzeni: proste są nadal zwykłymi prostymi, płaszczyzny – zwykłymi płaszczyznami itd.

Otrzymane w ten sposób nowe geometrie zrobiły już około 1900 roku znaczną furorę w matematyce, choć nie wiedziano wtedy dokładnie, jak dalekie są one od euklidesowego pierwowzoru (ostatecznie określił to w latach dwudziestych Radon) i jak bardzo są mu bliskie (tu ostateczny rezultat uzyskał w latach czterdziestych John). Nie było też jeszcze analizy funkcjonalnej (stworzonej w latach trzydziestych głównie za sprawą Banacha), w której geometrie Minkowskiego są bardzo ważnym narzędziem badawczym (tzw. ciała cechujące).

Ogólna idea tych geometrii – struktura liniowa jak najbardziej „zwyczajna", wzięta z geometrii euklidesowej i nie naruszające tej struktury zaburzenie struktury metrycznej – jest ideą, z której wywodzi się również i czasoprzestrzeń. Czasoprzestrzeń, czyli właśnie poszukiwany przez Einsteina model matematyczny szczególnej teorii względności.

Praca Minkowskiego wprowadzająca to pojęcie została napisana w 1908, a wydrukowana w 1909 roku – roku śmierci Minkowskiego. Stworzyło to zdumiewające zjawisko – geometria czasoprzestrzeni praktycznie nigdy nie stała się obiektem intensywnych badań matematyków, uprawiali ją właściwie wyłącznie fizycy i to pragmatycznie: badano tylko te jej własności, które mają klarowną interpretację fizyczną.

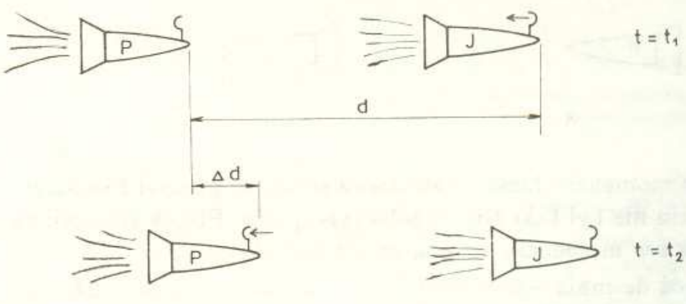
O tej części teorii czasoprzestrzeni jest mowa w innych artykułach w tym numerze *Delty*. Tu chciałbym przedstawić spojrzenie na nią jako na obiekt matematyczny. Aby uprościć sobie zadanie, będę mówił o „czasoprostej", a więc przestrzeni dwuwymiarowej, której struktura liniowa jest identyczna jak płaszczyzny euklidesowej, ale stosunki metryczne są tu bardzo odmienne.

odbiję za pomocą lustra. Gdy impuls dotrze do mnie, nastawię swój zegarek na punkt 11:50. Gdy ty zobaczysz odbity przeze mnie sygnał, nastaw swój zegarek na godzinę późniejszą o połowę czasu, jaki upłynął między wysłaniem a odbiorem sygnału. Wystartujemy, gdy nasze zegarki pokażą dokładnie 12:00!

Stało się tak, jak mówił Jacek. Zegary zostały doskonale zsynchronizowane i start nastąpił równocześnie.

– Uf, problem mamy z głowy – stwierdził Placek. – Świetnie to rozwiązałeś. Jak już jesteś taki sprytny, to powiedz mi jeszcze, jaki sens ma cały ten eksperyment. Nasze rakiety są identyczne. Cały czas poruszamy się z identycznymi prędkościami i podlegamy tym samym przyspieszeniom. W naszych sytuacjach nie ma żadnych różnic. Nasza podróż ma się zakończyć, gdy twój zegar i mój zegar wskażą ponownie dokładnie godzinę 12:00. Co więc mogą pokazywać, gdy je porównamy po zakończeniu? Oczywiście, zawsze tę samą godzinę. Szkoda paliwa i naszego wysiłku na takie eksperymenty.

– Nie masz racji, bracie – odpowiedział Jacek. – Gdy wysiądziemy z rakiet, ja, który znajduję się z przodu, będę starszy, a mój zegarek wskaże godzinę późniejszą niż twój. Popatrz na naszą sytuację z punktu widzenia obserwatora pozostającego na kosmodromie. Wyobraź też sobie, że aby porównać wskazania naszych zegarów, wysyłam do ciebie regularnie co sekundę impuls świetlny. Ustaliliśmy już przecież, że posługując się impulsami świetlnymi realizujemy najlepszy z istniejących sposobów porównywania zegarów. Ponieważ twoja rakieta porusza się w kierunku mojej z przyspieszeniem, więc dla obserwatora na kosmodromie będzie oczywiste, że impuls świetlny zawsze przebędzie drogę krótszą niż ta, która dzieliła nasze rakiety w chwili jego wysłania. A zatem, będziesz odbierać moje impulsy świetlne w odstępach krótszych niż wtedy, gdybyśmy poruszali się bez przyspieszenia. Stosując naszą procedurę synchronizacji zegarków stwierdzisz, że w chwili przybycia każdego z impulsów musisz odrobinę posunąć swój zegarek do przodu. Oznacza to, że późni się on w stosunku do mojego zegara. Mówiąc jeszcze inaczej, czas w twojej rakiecie, Placku, płynie wolniej niż w mojej!



Impuls świetlny wysłany przez Jacka w chwili $t = t_1$ i odebrany przez Placka w chwili $t = t_2$ przebył dystans mniejszy niż odległość d między rakietami. Różnica Δd równa jest drodze przebytej przez rakietę Placka w czasie $t_2 - t_1$. Gdyby prędkości były znacznie mniejsze niż prędkość światła c, a przyspieszenie stałe i wynosiło a, moglibyśmy napisać

$$c(t_2 - t_1) \simeq d - \frac{a}{2}(t_2 - t_1)^2,$$

czyli

$$t_2 - t_1 \simeq \frac{1}{c}\left(d - \frac{ad^2}{2c^2}\right).$$

Wzór ten pokazuje, że różne tempo upływu czasu w rakietach Jacka i Placka pojawia się tylko, gdy $a \neq 0$.

– Nie, to niemożliwe! Warunki naszego lotu są takie same. A zatem i czas musi płynąć w takim samym tempie. Twoje rozumowanie ...

Zostawmy naszych sprzeczających się bliźniaków i spróbujmy sami rozstrzygnąć ich spór. Nasza decyzja będzie zgoła salomonowa: obaj mają rację. Chociaż od chwili uruchomienia silników do chwili ich zgaszenia obydwaj bracia odmierzą ten sam czas, to jednak w ostatecznym rozrachunku Jacek okaże się starszy. To sprzeczne ze zdrowym rozsądkiem, zawoła może Czytelnik. Otóż nie, bowiem może się zdarzyć – i właśnie zdarzy się – że koniec pracy silników nie będzie równoczesny. Jacek wyłączy silniki i jeszcze przez chwilę będzie miał okazję obserwować pracę silników w rakiecie swego brata – bliźniaka. Do takiego rozwiązania przekonuje nas zastosowanie transformacji Lorentza. Transformacja ta, będąca podstawą sformułowania szczególnej teorii względności, wiąże położenie i czas (x,t), mierzone w pewnym układzie inercjalnym (np. związanym z kosmodromem) z położeniem i czasem (x',t') mierzonymi w innym układzie inercjalnym (np. w układzie, w którym rakiety bliźniaków znajdą się w spoczynku po zakończeniu pracy silników), poruszającym się względem układu wyjściowego z prędkością v w kierunku osi x:

$$x' = \gamma(x - vt)\,, \qquad t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)\,. \tag{1}$$

Tutaj c jest prędkością światła, a

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,. \tag{2}$$

Stosując transformację Lorentza do chwil t_J i t_P zatrzymania się silników Jacka i Placka dostaniemy

$$t'_J = \gamma\left(t_J - \frac{v}{c^2}x_J\right)\,, \quad t'_P = \gamma\left(t_P - \frac{v}{c^2}x_P\right)\,. \tag{3}$$

Odejmując stronami te równości i korzystając z tego, że dla obserwatora związanego z kosmodromem obaj bracia wyłączają silniki w tym samym czasie $(t_J = t_P)$, a odległość ich rakiet jest stała i wynosi $d = x_J - x_P$, dostaniemy

$$t'_P - t'_J = \gamma\frac{v}{c^2}d\,. \tag{4}$$

A zatem rzeczywiście – w końcowym układzie inercjalnym Jacek zatrzymał się o $\gamma\frac{v}{c^2}d$ wcześniej niż Placek. O tyle też będzie starszy Jacek od swego brata.

Dziwne, prawda? Ale najdziwniejsze jest to, że eksperyment, jaki przypadł w udziale naszym bliźniakom, został już właściwie zrealizowany i to 30 lat temu. No, oczywiście, nie za pomocą rakiet. Skorzystano z zasady równoważności, która głosi, że efekty pól grawitacyjnych i sił bezwładności są lokalnie nierozróżnialne. Przyspieszające rakiety zastąpiono więc ziemskim polem grawitacyjnym, a zamiast porównywania wskazań zegarów mierzono częstości tej samej wiązki świetlnej w dwóch różnych punktach, których wysokości różniły się o d. Pozostawiam Czytelnikowi w charakterze prostej łamigłówki wykazanie, że w tym przypadku wzór (4) – r należy interpretować jako prędkość spadku swobodnego z wysokości d – można przepisać w postaci

$$\frac{\nu_d}{\nu_0} \simeq 1 - \frac{gd}{c^2}\,,$$

gdzie ν_h oznacza częstość światła mierzoną na wysokości h, a g jest przyspieszeniem grawitacyjnym. W doświadczeniu, o którym mowa, czynnik $\frac{gd}{c^2}$ wynosił około 10^{-15}. Technika pozwalająca na pomiar tak fantastycznie małych różnic częstości jest równie interesująca jak opisany powyżej problem. Ale to, niestety, już zupełnie odrębna historia.

Stosunki metryczne określa się często przez podanie tzw. iloczynu skalarnego, tj. wyrażenia przypisującego parze wektorów $\mathbf{v}=[x_1,x_2]$ i $\mathbf{w}=[y_1,y_2]$ liczbę rzeczywistą według przepisu

$$\mathbf{v}\circ\mathbf{w} = \\ = \alpha_{11}x_1y_1 + \alpha_{12}x_1y_2 + \alpha_{21}x_2y_1 + \alpha_{22}x_2y_2\,.$$

Widać więc, że konkretny wzór otrzymujemy przez określenie współczynników α_{ij}. Taki iloczyn skalarny wiąże się z długością za pomocą definicji

$$\|\mathbf{v}\| = \\ = \sqrt{\alpha_{11}x_1^2 + (\alpha_{12}+\alpha_{21})x_1x_2 + \alpha_{22}x_2^2} = \\ = \sqrt{\mathbf{v}\circ\mathbf{v}}\,.$$

Łatwo zauważyć, że dla $\alpha_{11}=\alpha_{22}=1$ i $\alpha_{12}=\alpha_{21}=0$ otrzymujemy zwykły, euklidesowy iloczyn skalarny i zwykłą, euklidesową długość. Również łatwo wymyślić takie współczynniki α_{ij}, by dla nich niektóre wektory nie miały długości (bo pod pierwiastkiem znajdzie się liczba ujemna).

Ci Czytelnicy, którzy pamiętają szkolną geometrię analityczną, nie zdziwią się, że za pomocą iloczynu skalarnego określa się kąt między wektorami wzorem

$$\cos\angle(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \frac{\mathbf{v}\circ\mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|\cdot\|\mathbf{w}\|}\,,$$

co w szczególności pociąga za sobą warunek

$$\mathbf{v}\perp\mathbf{w} \iff \mathbf{v}\circ\mathbf{w} = 0\,,$$

który to warunek ma sens również, gdy długości wektorów $\mathbf{v}$ i $\mathbf{w}$ nie są liczbami rzeczywistymi lub są równe zeru.

W tej konwencji czasoprosta Minkowskiego będzie opisana przez ustalenie, że $\alpha_{11}=1$, $\alpha_{22}=-1$, $\alpha_{12}=\alpha_{21}=0$.

W przestrzeni o większej liczbie wymiarów odpowiedni wybór to $\alpha_{11}=\alpha_{22}=\ldots=\alpha_{n-1,n-1}=1$, $\alpha_{nn}=-1$, a pozostałe α_{ij} równe zeru.

Pierwsze ważne spostrzeżenie to fakt, że istnieją wektory (a w konsekwencji i proste mające ich kierunek), które są same do siebie prostopadłe – w matematyce nazywa się je izotropowymi. Istotnie: takimi są wektory $[a,a]$ i $[a,-a]$. Sprawdźmy. Skoro

$$\mathbf{v}\circ\mathbf{w} = x_1y_1 - x_2y_2\,,$$

więc

$$[a,a]\circ[a,a] = a^2 - a^2 = 0 = \\ = a^2 - (-a)^2 = [a,-a]\circ[a,-a]\,.$$

A proste izotropowe to wszystkie proste o równaniach

$$x + y = b \quad \text{lub} \quad x - y = b\,,$$

dla dowolnego b.