O pewnych funkcjach okresowych i ich okresach podstawowych

Ewa DUDEK

Zacznijmy od pewnego zadania:
Udowodnij, że jeśli dla funkcji $f, g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ istnieje $a \neq 0$, takie, że dla wszystkich $x \in \mathbf{R}$: $f(x+a) = g(x)$ oraz $g(x+a) = -f(x)$, to f i g są okresowe.

Przypomnijmy: mówimy, że $F: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ jest okresowa wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $T \neq 0$, takie, że dla każdego $x \in \mathbf{R}$ zachodzi związek: $F(x+T) = F(x)$; takie T nazywamy okresem funkcji F (najczęściej to pojęcie definiowane jest trochę inaczej, ale w sposób równoważny).

Rozwiązanie zadania jest proste:
dla $x \in \mathbf{R}$ mamy $f(x+4a) = g(x+3a) = -f(x+2a) = -g(x+a) = f(x)$. Liczba $T = 4a \neq 0$ jest okresem funkcji f, g zaś jako przesunięcie f o wektor $[-a, 0]$ ma te same własności. Zauważmy, że przykładami funkcji spełniających założenia są sinus i cosinus (dla $a = \frac{\pi}{2}$).

Zadanie rozwiązaliśmy i w zasadzie jego historia, a wraz z nią niniejszy artykuł, mogłyby się tu urwać. Dlaczego więc Czytelnik ma przed sobą jeszcze spory kawałek tekstu? Z tej samej przyczyny, dla której policjant, zauważywszy zamaskowanego i obładowanego tobołkami człowieka opuszczającego w środku nocy jakieś mieszkanie przez balkon, nie zadowala się jedynie stwierdzeniem tego faktu, ale zatrzymuje podejrzanego i zadaje mu pewne **standardowe dla tych okoliczności** pytania. Takimi pytaniami w sytuacji, w której „złapiemy” funkcję okresową, są:
(I) czy ta funkcja ma okres podstawowy?
(II) jeśli ma, to jaki?

Przypomnijmy, że okresem podstawowym nazywamy (o ile istnieje) najmniejszy spośród **dodatnich** okresów. Funkcja okresowa może mieć okres podstawowy (np. funkcje trygonometryczne) albo go nie mieć (np. dla każdej funkcji stałej okresem jest każda liczba różna od zera). Znana jest ponadto bardzo prosta własność: *niezerowa suma i różnica okresów też jest okresem.* W szczególności, jeśli T jest okresem funkcji, to są nimi również liczby: $\pm T, \pm 2T, \ldots$

Jak brzmi odpowiedź na pytania (I) i (II) w przypadku funkcji z zadania? Zauważmy, że wystarczy zająć się funkcją $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ (g jest jej przesunięciem, więc ma analogiczne własności), dla której

(0) *istnieje $b > 0$ ($b = 2a$), takie, że dla $x \in \mathbf{R}$:* $f(x+b) = -f(x)$
(takich b może być wiele; zbiór złożony z nich wszystkich oznaczmy przez B).

Spróbujmy odpowiedzieć na pytanie (II) przyjmując, że funkcja f o własności (0) ma okres podstawowy T_0. Jak go wyznaczyć? Wiemy, że
(i) *istnieje $x_0 \in \mathbf{R}$, takie, że $f(x_0) \neq 0$* (w przeciwnym razie f byłaby stała, tzn. nie miałaby okresu podstawowego);
(ii) *żadne $b \in B$ nie jest okresem* (bo dla x_0 z punktu (i) mamy: $f(x_0+b) = -f(x_0) \neq f(x_0)$);
(iii) *dla każdego $b \in B$ liczba $2b$ jest okresem.*

Ostatnia uwaga nasuwa pomysł: skoro szukamy **najmniejszego dodatniego** okresu T_0, a wszystkie liczby $2b$ ($b \in B$) **są dodatnimi** okresami, to może

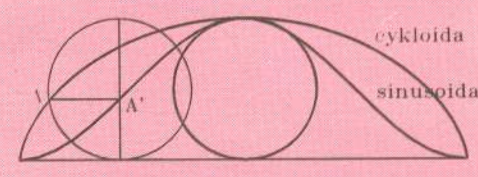
(1 – hipoteza) $$T_0 = \min\{2b : b \in B\} = 2 \cdot \min B,$$

gdzie $\min B$ jest liczbą najmniejszą w B? Co wystarczyłoby wiedzieć, by móc uzasadnić hipotezę (1)? Gdyby dla **jakiegokolwiek** $b_0 \in B$ było

(2) $$T_0 = 2b_0,$$

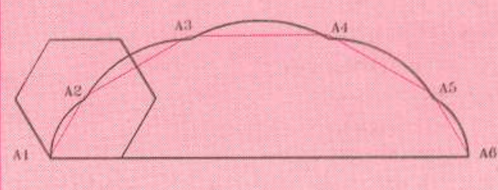
to już byłoby dobrze. Takie b_0 musi już być najmniejsze w B (dzięki (iii)).

Jako pierwszy badaniem cykloidy zajął się Galileusz (1564– 1642). On nadał jej nazwę, sformułował jej definicję i zaintersował nią innych matematyków. Ważąc figury wycięte z jednakowych materiałów odkrył, że pole pod jedną gałęzią cykloidy jest trzykrotnie większe od pola koła generującego tę cykloidę. Matematyczny dowód tego faktu znaleziony został później przez Robervala (1602–1675). W swoim dowodzie posłużył się on krzywą pomocniczą, którą nazwał „towarzyszką cykloidy”. Konstruował ją w ten sposób, że w każdej chwili, kiedy koło toczyło się po prostej, rzutował punkt kreślący cykloidę na pionową średnicę koła. Trajektorię tego rzutu nazwał właśnie „towarzyszką cykloidy”. Okazała się ona wykresem funkcji sinus i w taki właśnie sposób w historii matematyki po raz pierwszy pojawiła się sinusoida. Roberval pokazał, że pole koła generującego jest równe polu obszaru ograniczonego cykloidą i jej „towarzyszką”, a to z kolei jest równe polu obszaru ograniczonego podstawą cykloidy, jej „towarzyszką” i brzegiem koła generującego wpisanego w cykloidę. Tym samym udowodnił, że pole pod cykloidą jest trzykrotnie większe od pola koła generującego tę cykloidę (rys. 11). Tego samego dowiedli również Kartezjusz (1596–1650) i Fermat (1601–1665), którzy zaciekle rywalizowali z Robervalem w badaniu własności cykloidy.



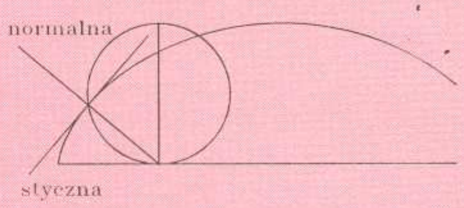
Rys. 11

Ciekawe, że podobne twierdzenie o polu jest prawdziwe dla dowolnego wielokąta foremnego toczącego się po prostej. Mianowicie pole pod łamaną $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ jest trzykrotnie większe od pola n-kąta generującego tę łamaną.



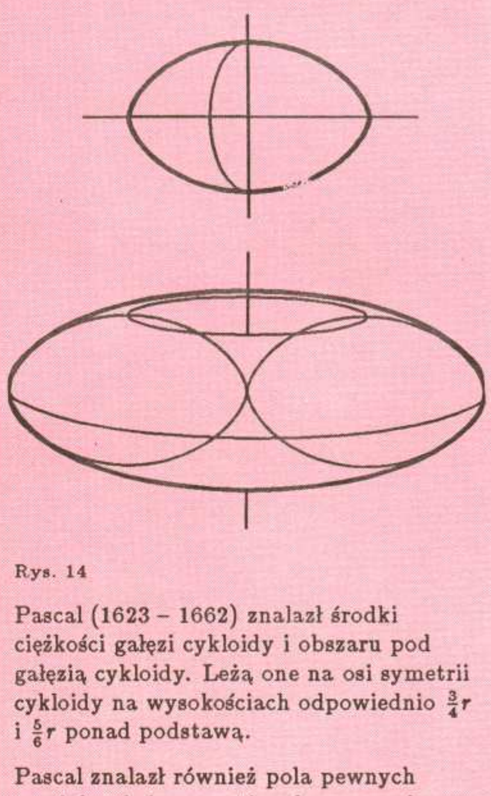
Rys. 12

Roberval, Kartezjusz i Fermat znaleźli również metodę konstruowania stycznej i normalnej do cykloidy w dowolnym jej punkcie. Otóż normalną należy prowadzić przez punkt styczności koła generującego – z prostą, po której ono się toczy, a styczną przez przeciwległy temu punktowi koniec średnicy.



Rys. 13

Wdzięcznym przedmiotem badań okazały się również bryły utworzone przez obrót gałęzi cykloidy wokół podstawy lub wokół prostej prostopadłej do podstawy w jednym z jej końców (rys. 14). Ich objętości wynoszą odpowiednio $5\pi^2r^3$ i $12\pi r^3$, a pola $\frac{64}{3}\pi r^2$ i $32\pi^2r^2$. Badane były przede wszystkim przez Robervala, Fermata i Pascala.



Rys. 14

Pascal (1623 – 1662) znalazł środki ciężkości gałęzi cykloidy i obszaru pod gałęzią cykloidy. Leżą one na osi symetrii cykloidy na wysokościach odpowiednio $\frac{3}{4}r$ i $\frac{5}{6}r$ ponad podstawą.

Pascal znalazł również pola pewnych specjalnych fragmentów obszaru pod cykloidą i ich środki ciężkości, a także środki ciężkości pewnych fragmentów opisywanych wyżej brył. Dumny ze swych osiągnięć ogłosił konkurs na rozwiązanie tych i podobnych zadań. Jednak problemy te były jak na tamte czasy ogromnie trudne i niewielu spośród najwybitniejszych matematyków uczestniczących w konkursie mogło poszczycić się jakimkolwiek sukcesem.

Dalej, wiemy, że liczby $2b - T_0$ (dla $b \in B$) są zerami lub dodatnimi okresami, większymi (dzięki (ii) różnymi) od T_0. Gdyby więc liczba tej postaci spełniała warunek

(3) $$2b - T_0 \leq T_0,$$

to musiałaby być zerem, co oznaczałoby, że $2b - T_0 = 0$, czyli $T_0 = 2b$. Zachodziłby więc upragniony związek (2)! No dobrze, ale kiedy możliwe jest (3)? Oczywiście, gdy dla pewnego $b \in B$ zachodzi $b \leq T_0$. Czy istnieje takie $b \in B$? Spróbujmy uzasadnić to nie wprost. Przypuśćmy, że jest przeciwnie:

(4 – hipoteza) $$\textit{dla każdego} \quad b \in B: \quad b > T_0.$$

Weźmy jedno takie $b \in B$ i wykonajmy coś w rodzaju dzielenia z resztą przez T_0, tzn. przedstawmy b jako $b = kT_0 + q$, gdzie $k \in \{1, 2, \ldots\}$ oraz $0 \leq q < T_0$ (q to „reszta"). Zauważmy, że kT_0 jest okresem, q zaś ma ciekawą własność:

$$\textit{dla wszystkich } x \in \mathbf{R}: \; f(x+q) = f(x+b-kT_0) = f(x+b) = -f(x).$$

Po przypomnieniu sobie definicji zbioru B z punktu (0) stwierdzimy, że zachodzi jedno z dwojga:

$q = 0$; jest to jednak niemożliwe, bo wtedy $b = kT_0$ byłoby okresem, a nie jest (patrz (ii));

$q \in B$, ale $q < T_0$, a zgodnie z hipotezą (4) wszystkie elementy B są większe od T_0.

Przyjęcie hipotezy (4) prowadzi – tak czy inaczej – do sprzeczności. Stąd prawdziwość jej zaprzeczenia. Istnieje zatem $b_0 \in B$ takie, że $b_0 \leq T_0$. To wystarcza, by zachodziło (3) oraz (2), które dowodzi, że hipoteza (1) jest odpowiedzią na PYTANIE (II):

jeśli f ma okres podstawowy, to jest nim $T_0 = 2 \cdot \min B$.

Zgodnie z przyjętym planem pozostaje udzielić odpowiedzi na PYTANIE (I), czyli stwierdzić, czy własność (0) wymusza istnienie okresu podstawowego. Przywołując przykład funkcji zerowej odpowiemy, że NIE. Sformułujmy więc pytanie (I) inaczej:

(I') *czy* **niezerowa** *funkcja o własności* (0) *musi mieć okres podstawowy?*

Odpowiedź nadal brzmi: NIE; odpowiedni przykład nie jest jednak już tak prosty. Aby go skonstruować wyróżnimy dwa podzbiory $\mathbf{R}$. Zbiór

$$X \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \frac{k}{3^n} : \; k = 0, \pm 1, \ldots, \; n = 0, 1, \ldots \right\}$$

tworzą liczby wymierne o mianownikach postaci 3^n ($n = 0, 1, \ldots$). Zauważmy, że liczby całkowite (w tym 1) leżą w X, oraz że suma liczb z X także leży w tym zbiorze. Drugi z zapowiedzianych zbiorów

$$Y \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \frac{1}{2} + x : \; x \in X \right\}$$

jest przesunięciem X o $\frac{1}{2}$.

Rozwiązanie zadania F 810.
Niech q oznacza ładunek, jaki zgromadzi się na kondensatorze, a C jego pojemność. Energia pobrana z baterii równa się Uq, natomiast energia naładowanego kondensatora jest równa $\frac{1}{2}Uq$. Różnica powyższych energii równa jest ciepłu, jakie wydzieli się na oporze: $Q = \frac{1}{2}Uq$. Ponieważ $q = CU$, więc otrzymujemy $C = \frac{2Q}{U^2}$.

Rozwiązanie zadania F 811.
Niech S_0 i S oznaczają przekrój strumienia w pobliżu kranu i w odległości $h = 60$ cm poniżej kranu. Prędkości strumienia wody niech wynoszą odpowiednio U_0 i U. Ponieważ gęstość wody nie zmienia się, przez dany przekrój musi przepływać w jednostce czasu ta sama objętość wody: $\frac{dV}{dt} = \text{const}$, ale $\frac{dV}{dt} = SU = S_0U_0$. Uwzględniając, że $S/S_0 = 2$ mamy $U = 2U_0$. Z zasady zachowania energii mamy

$$\frac{mU^2}{2} - \frac{mU_0^2}{2} = mgh.$$

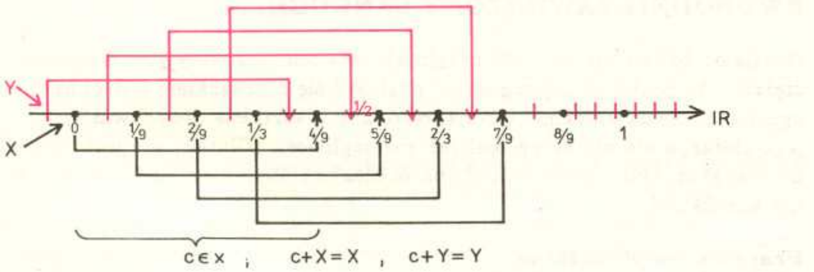
Rozwiązując ostatnie dwa równania otrzymujemy

$$U_0 = \sqrt{\frac{2}{3}gh} \approx 2 \text{ m/s}.$$

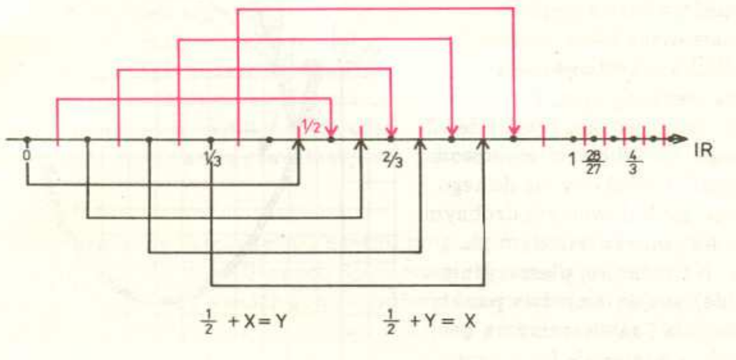
Oto niektóre własności tych zbiorów:

(A) $X \cap Y = \emptyset$ (gdyby $x \in X$ było postaci $x = \frac{1}{2} + x$ dla $x \in X$, to mielibyśmy: $\frac{1}{2} = x - x \in X$; tak, oczywiście, nie jest); zatem rozbiliśmy $\mathbf{R}$ na trzy rozłączne części: X, Y, $\mathbf{R}\setminus(X \cup Y)$;

(B) przy przesunięciu o liczbę ze zbioru X zbiory X i Y oraz $\mathbf{R}\setminus(X \cup Y)$ „nasuwają się” każdy na siebie (patrz: własności X i rysunek);



(C) przy przesunięciu o $\frac{1}{2}$ zbiór X przechodzi na Y, Y na X; zatem $\mathbf{R}\setminus(X \cup Y)$ przechodzi na siebie.

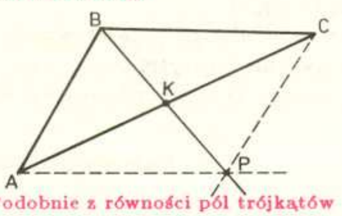


Uzbrojeni po zęby w różnorakie własności X i Y możemy w końcu podać zapowiedziany przykład. Jest nim następująca funkcja:

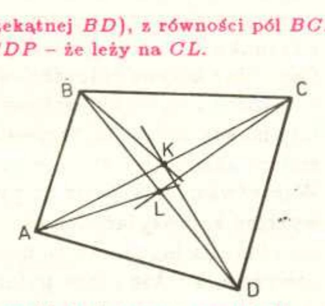
$$f(x) = \begin{cases} 1; & x \in X \\ -1; & x \in Y \\ 0; & x \in \mathbf{R}\setminus(X \cup Y). \end{cases}$$

Jest to funkcja niezerowa, ponadto dla $b = \frac{1}{2}$ spełnia warunek (0). Istotnie, dla $x \in X$, zgodnie z (C), $\frac{1}{2} + x \in Y$, czyli $f(x) = 1$, $f(\frac{1}{2} + x) = -1$; ostatecznie $f(x + \frac{1}{2}) = -f(x)$. Dla $x \in Y$ i $x \in \mathbf{R}\setminus(X \cup Y)$ postępujemy podobnie. Równie szybko uzasadniamy, że dowolne $T \in X\setminus\{0\}$ jest okresem f. Dla argumentu $x \in Y$ mamy, dzięki (B), $x + T \in Y$, co oznacza, że $f(x) = -1 = f(x + T)$; w pozostałych przypadkach rozumowanie jest analogiczne. Wśród dodatnich okresów f znajdują się: $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots$, zatem f **nie ma** okresu podstawowego.

Rozwiązanie zadania M 606.
Ponieważ pola trójkątów ABP i BCP są równe, więc punkt P musi leżeć na prostej BK, gdzie K jest środkiem przekątnej AC (porównaj rozwiązanie zadania M 604).



Podobnie z równości pól trójkątów CDP i DAP wynika, że P leży na DK, z równości pól ABP i DAP – że leży na AL (gdzie L jest środkiem przekątnej BD), z równości pól BCP i CDP – że leży na CL.



Warunki te nie są sprzeczne tylko wtedy, gdy proste BK i DK lub proste AL i CL pokrywają się, ale to dowodzi tezy zadania (np. gdy proste BK i DK pokrywają się, punkt K leży na BD).

Wkrótce potem Wren (1632–1723) obliczył, że długość gałęzi cykloidy jest ośmiokrotnie większa od promienia koła generującego. Jego wynik wzbudził wielką sensację. Po pierwsze dlatego, że do tamtego czasu matematykom udało się obliczyć jedynie długość okręgu, paraboli i spirali. Po drugie nikt nie wierzył, że długość łuku krzywej może być współmierna z długością odcinka prostej.

Jednym z większych problemów XVII wieku było mierzenie długości geograficznej na pokładzie podróżującego statku. Potrzebny był do tego dokładny zegar i taki próbowano skonstruować. Galileusz zauważył, że do mierzenia czasu można by wykorzystać ruch wahadłowy, a Huygens (1601–1665) kontynuując badania Galileusza skonstruował pierwszy zegar wahadłowy. Jednak zegar ten nie był doskonały, gdyż z upływem czasu, gdy pod wpływem tarcia i oporu powietrza amplituda wahań zmniejszała się, zmniejszał się także okres, tym samym zegar zaczynał się spieszyć. Huygens wyliczył, że aby zapewnić stałość okresu, niezależnie od amplitudy (tzw. izochronizm), należałoby ze wzrostem amplitudy zmniejszać długość wahadła. W tym celu w punkcie zawieszenia wahadła zamocował szczęki ograniczające długość wahadła (rys. 15), nie wiedział jednak, jaki powinien być dokładny kształt tych szczęk.

Rys. 15

Udało mu się natomiast wyliczyć, po jakiej krzywej musi się poruszać koniec ograniczonego szczękami izochronicznego wahadła. Tą krzywą – izochroną (Huygens zwał ją tautochroną) – okazała się cykloida. Pozostał jeszcze problem wyznaczenia kształtu szczęk. Do jego rozwiązania wykorzystał Huygens wynalezioną przez siebie wcześniej teorię ewolwent. Ewolwentą krzywej jest, potocznie rzecz ujmując, trajektoria końca