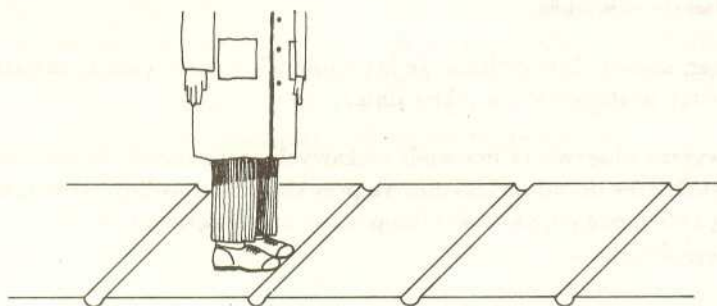


Zbigniew MARCINIAK

Gdy odbywam długie spacery, pewien fakt nieustannie zwraca moją uwagę. O ile zachowuję stałą długość kroku, wciąż zdarza się, że następuję na linie oddzielające kolejne płyty chodnika. Dlaczego tak się dzieje?

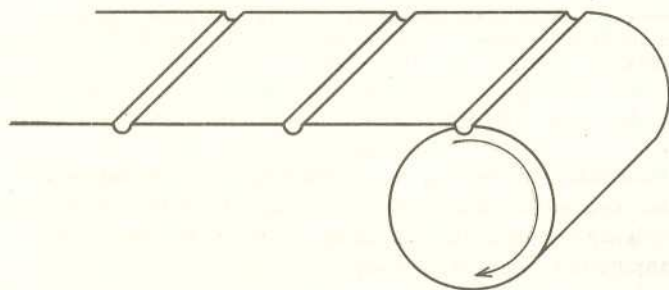
Spróbujmy sformułować powyższe zagadnienie jako problem matematyczny. Załóżmy, że chodnik jest zbudowany z płyt w kształcie prostokątów, każdy o długości 1 m. Kolejne płyty są oddzielone wąskimi przerwami. Aby podkreślić fakt, że przerwy są rzeczywiście wąskie, ich szerokość oznaczmy przez ε . Załóżmy również, że przed rozpoczęciem spaceru stoję w ten sposób, iż czubki moich butów dotykają przerwy między płytami.



Aby uniknąć niejednoznaczności w definicji „następowania na linie”, wyrażę ją w ścisły sposób: następuję na linię tylko wtedy, gdy czubek mojego buta dotyka jednej z przerw o szerokości ε . Pytanie: czy mogę tak dobrać długość l mojego kroku, aby nie następować na linie?

Oczywiście, $l = 1$ jest wyborem najgorszym z możliwych: w tej sytuacji następuję na każdą linię. Większe liczby naturalne wcale nie są lepsze: w każdym kroku będę następował na linię. Żadna z liczb wymiernych nie jest również dobrym wyborem: gdy będzie to $\frac{p}{q}$, po każdym q krokach również powtarza się poprzedni przypadek. A co stanie się, gdy wybiorę l niewymierne, np. $\sqrt{2}$?

Aby uprościć rozważania, wyobraźmy sobie, że chodnik zwinęliśmy jak dywan.



Teraz wygląda on jak okrąg, w którym wszystkie przerwy zajmują tę samą pozycję na obwodzie. Zaczynamy spacer. W czasie drogi zaznaczamy na okręgu kolejne ślady x_1, x_2, \dots czubków butów.

Magia cykloid

Elżbieta BOBIK

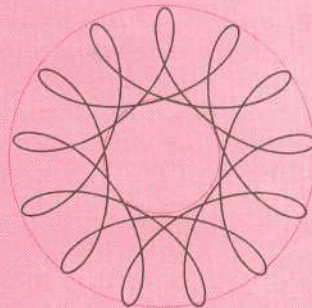
Magiczne krążki

Od czasu do czasu pokazują się w sklepach tzw. spirografy – zestawy służące do rysowania ciekawych wykresów. Niedawno znów pojawiły się one w kioskach Ruchu, tym razem pod nazwą „magiczne krążki”. Taki zestaw składa się z dwóch krążków z wyciętymi kilkoma małymi otworkami i dwóch szablonów w kształcie kwadratu z dużym wyciętym otworem (rysunek na tylnej okładce).

Aby sporządzić rysunek, należy umieścić krążek w otworze szablonu, a następnie do otworka w krążku włożyć koniec ołówka i dociskając ołówkiem krążek do ściany otworu szablonu wykonywać krążkiem ruchy kołowe (patrz rysunek na tylnej okładce). Dobierając różne szablony można otrzymać wiele ciekawych rysunków.

„Magiczne krążki” można również sporządzić samemu, wycinając każdy element ze sklejki. W przypadku trudności ze zrobieniem ząbków można na brzeg krążka naciągnąć zwykłą gumkę aptekarską, która również dobrze zapobiega ślizganiu się krążka wewnątrz otworu.

Każda krzywa rysowana za pomocą „magicznych krążków” będzie mieściła się w pierścieniu, którego promienie nietrudno określić.



Rys. 1

W trakcie rysowania krążek toczy się wewnątrz otworu szablonu. Jeśli przetoczy się jeden raz wzdłuż swego obwodu, otrzymamy kawałek krzywej. Nazwijmy go gałęzią. Każde następne przetoczenie się krążka to następna gałąź krzywej. Gdyby krążek po wykonaniu pewnej liczby przetoczeń znalazł się ponownie w położeniu początkowym, wtedy każda następna gałąź pokrywałaby się z gałęzią już narysowaną. Taką krzywą, która od pewnej chwili zaczyna biec sama po sobie, nazwijmy krzywą zamkniętą. Krążek wróci do swego położenia początkowego jedynie w tych przypadkach, gdy jego

obwód i obwód otworu szablonu będą wielkościami współmiernymi, tzn. gdy będzie istniała ich wspólna wielokrotność. Jest to równoważne warunkowi, że stosunek długości promienia krążka (r) do długości promienia otworu (R) jest liczbą wymierną. Jeśli liczba ta (po uproszczeniu) jest równa p/q , to q obwodów krążka ma tę samą długość co p obwodów otworu, więc wykonując q przetoczeń krążek obiegnie p razy wewnątrz otworu, zanim wróci do położenia początkowego. Tym samym krzywa zatoczy q łuków przecinając samą siebie w przynajmniej $q(p-1)$ punktach, a następnie zacznie biec po sobie samej.

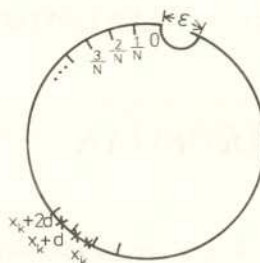
A jeżeli stosunek r/R jest liczbą niewymierną? Wtedy obwód krążka i obwód otworu będą wielkościami niewspółmiernymi i krzywa nigdy się nie zamknie. Będzie ona coraz gęściej wypełniała pierścień, którym jest ograniczona, jednakże nigdy całkowicie go nie wypełni. Zawsze zostanie nieskończenie wiele punktów, przez które krzywa jeszcze nie przeszła i nigdy nie przejdzie. Niemniej krzywa prędzej czy później przybliży się do każdego z tych punktów na dowolnie małą odległość. W języku topologii oznacza to, że zbiór punktów krzywej jest gęsty w zbiorze punktów pierścienia.

Wielkości elementów zestawu „magicznych krążków” są tak dobrane, że każda krzywa, jaką możemy za ich pomocą narysować, jest krzywą zamkniętą.

Przypuśćmy, że chcemy tak ulepszyć zestaw, by móc rysować krzywe o jeszcze innych kształtach. Gdyby w tym celu wyciąć dodatkowe otworki w krążkach, to „nowe” krzywe nie różniłyby się istotnie od „starych” i, oczywiście, nadal byłyby zamknięte. Żeby zrozumieć dlaczego tak będzie, wyobraźmy sobie, że otworki zamiast na całej powierzchni krążka są rozmieszczone tylko na jego promieniu. Leżałyby one wtedy bardzo blisko „jeden przy drugim” i dlatego wycięcie otworków pośrednich nie wzbogaciłoby zbytnio zestawu możliwych do uzyskania krzywych. Chyba że dodatkowe otworki umieścilibyśmy na obu końcach promienia krążka. Aby stwierdzić, jakie krzywe wtedy otrzymamy, przeanalizujmy rysunek z okładki. Przedstawione na nim krzywe narysowano za pomocą jednego szablonu i jednego krążka, przy czym koniec ołówka umieszczany był w otworkach leżących coraz bliżej środka krążka. Obserwując, jak zmienia się kształt krzywej, łatwo sobie wyobrazić krzywą narysowaną przez otworek pośredni i równie łatwo odgadnąć, że jeśli umieścimy koniec ołówka w środku

Teraz robimy tak.

Wybieramy liczbę naturalną N spełniającą warunek $1/N < \epsilon$. Dzielimy obwód naszego okręgu na N równych łuków, każdy o długości $1/N$ m.



Ponieważ liczby x_1, x_2, \dots są niewymierne, żadna z nich nie wypadnie na punkcie podziału. Jak wynika z zasady szufladkowej Dirichleta, istnieją punkty x_k, x_{k+d} , które leżą na tym samym łuku o długości mniejszej niż ϵ . Wobec tego punkty $x_k, x_{k+d}, x_{k+2d}, \dots$ dają podział całego okręgu i to taki, że dwa dowolne, kolejne punkty są odległe o mniej niż ϵ . W końcu jedna para punktów musi trafić w przerwę.

Zasada szufladkowa Dirichleta: rozmieszczamy n przedmiotów w m szufladach – gdy $n > m$, to przynajmniej w jednej z szuflad będą co najmniej dwa przedmioty.

Tutaj: ponieważ punktów x_i możemy wziąć dowolnie wiele, więc – po pewnym czasie – zaczniemy umieszczać je w przedziałach, w których już poprzednio znalazł się jakiś punkt.

W ten sposób dowiedliśmy, że jakiegokolwiek wybierzemy l , zawsze musimy następować na jakiejś linii.

Powyższa obserwacja ma wiele ciekawych zastosowań. Zachęcamy Czytelników do udowodnienia na przykład, że dowolny skończony ciąg cyfr może pojawić się jako początek dziesiętnego zapisu pewnej potęgi dwójki.



Zadania

M 604. Punkt P ma tę własność, że dla pewnego trójkąta ABC pola trójkątów ABP, BCP i CAP są równe. Wykazać, że P jest środkiem ciężkości (tj. punktem przecięcia środkowych) tego trójkąta. Rozwiązanie na str. 8

M 605. W czworokącie wypukłym $ABCD$ przekątne przecinają się w takim punkcie P , że pola trójkątów ABP i CDP są równe. Wykazać, że czworokąt ten jest trapezem. Rozwiązanie na str. 8

M 606. Punkt P ma tę własność, że dla pewnego wypukłego czworokąta $ABCD$ pola trójkątów ABP, BCP, CDP i DAP są równe. Wykazać, że jedna z przekątnych tego czworokąta połowi drugą. Rozwiązanie na str. 11

Zadania matematyczne zostały zaczerpnięte z programu zajęć z geometrii na Trzyletnim Studium Zawodowym nauczycieli matematyki na Uniwersytecie Warszawskim.

Redaguje Jarosław KULPA

F 310. Kondensator połączony szeregowo z oporem o rezystancji R naładowało za pomocą baterii o napięciu U . Podczas ładowania na oporze wydzielilo się ciepło Q . Obliczyć pojemność kondensatora (opór wewnętrzny baterii należy zaniedbać). Rozwiązanie na str. 10

F 311. Z kranu, pionowo w dół wypływa strumień wody. Na odcinku 60 cm przekrój strumienia maleje o połowę. Obliczyć prędkość wypływu z kranu. Rozwiązanie na str. 10

Potocznie mówi się czasem, że wiado gwiazdy jest jakby jej paszportem, co ma oznaczać, że paszport ten zawiera informacje charakterystyczne akurat dla tej gwiazdy i nic poza tym. Tymczasem tak nie jest. Nie zapominajmy bowiem, że przestrzeń między powierzchnią (fotosferą) gwiazdy a obserwatorem nie jest pusta i rozproszona tam materia zawsze może wzbogacić widmo odległej gwiazdy o linie widmowe nie mające z tą gwiazdą nic wspólnego. Tak np. w widmie Słońca (oczywiście – innych gwiazd także, ale u Słońca najłatwiej to zauważyć) występują linie pochodzące od gazów ziemskiej atmosfery. Z kolei w widmach wielu gwiazd obecne są linie pochodzące od materii międzygwiazdowej, a zorientowano się w tym na podstawie obserwacji widm gwiazd podwójnych. Mianowicie, wskutek ruchu obiegających się składników gwiazdy podwójnej ich promieniowanie musi podlegać zjawisku Dopplera. W wyniku tego linie w widmach obu gwiazd muszą rytmicznie zmieniać swoje obserwowane długości fal z okresem równym okresowi obiegu składników – zjawisko to obserwuje się w licznych przykładach. Tymczasem okazało się, że niektóre linie nie biorą udziału w tych wahaniach, ich długości fal są niezmiennie. Zinterpretowano to właśnie międzygwiazdowym ich pochodzeniem (Johannes Franz Hartmann, 1905) i fakt ten stał się koronnym dowodem istnienia rozproszonej materii międzygwiazdowej.

Krótko mówiąc: bez dokładniejszego zbadania nie ma właściwie nigdy całkowitej pewności, że dana linia widmowa pochodzi z atmosfery gwiazdy. A może to mieć dość ważne konsekwencje. Nikogo nie dziwią linie międzygwiazdowe w widmach gwiazd położonych w Drodze Mlecznej. Tymczasem już satelity Copernicus i IUE zaobserwowały u pewnych gorących gwiazd leżących w dużych szerokościach galaktycznych linie absorpcyjne wysoko zjonizowanego węgla, tlenu i azotu świadczące o temperaturze co najmniej 200 000 K. Zdawałoby się, że też nic w tym nadzwyczajnego, bowiem pierwiastki te w gwiazdach występują, a w ich koronach panuje temperatura jeszcze wyższa.

Kłopot w tym, że w widmie np. korony słonecznej widać silne linie wysoko zjonizowanego żelaza, niklu czy wapnia, a nie wspomnianych wcześniej pierwiastków. Samo zresztą zestawienie pierwiastków C, N, O kojarzy się nam od razu z wnętrzem gwiazd – są to wszak pierwiastki katalizujące w gorących gwiazdach reakcje łączenia się wodoru w hel. Być może to właśnie podsunęło badaczom myśl, że ten międzygwiazdowy węgiel, tlen i azot pochodzą z wnętrza gwiazd i tak wysunięto hipotezę tzw. fontann galaktycznych. Według niej wybuchy supernowych powodują rozproszenie gorącej (wiele milionów stopni) materii gwiazdowej również daleko poza płaszczyznę Galaktyki. Wyrzucona tam materia stygnie, rozprasa się i po czasie szacowanym na kilka milionów lat wraca do płaszczyzny Drogi Mlecznej.

Rzecz jasna, pięknie byłoby zobaczyć bezpośrednią emisję promieniowania przez ten gaz. I tak się też stało. Aparatura zbudowana przez Christophera Martina i Stuarta Bowyer'a z Berkeley (Kalifornia) i zainstalowana na wahadłowcu *Columbia* zarejestrowała emisyjne linie widmowe C, N, O, odpowiadające omawianym wyżej liniom absorpcyjnym, pochodzące z przestrzeni międzygwiazdowej nawet z okolic biegunów galaktycznych.

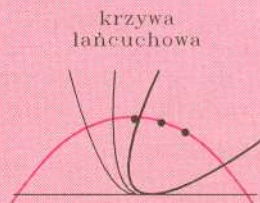
Tomasz KWAST

krażka – wykreślmy okrąg, a jeśli na brzegu krażka – krzywa, która ma ostrza zamiast „pętelek”.

A jakie nowe kształty krzywych otrzymamy, gdy sporządzimy nowe krażki i nowe szablony różniące się wielkością? Jak już zauważyliśmy, na kształt krzywej wpływają nie wielkości r i R , ale ich stosunek. Dlatego zamiast wykonywać nowe szablony i nowe krażki, wystarczy wykorzystać którykolwiek z posiadanych szablonów wykonując jedynie dodatkowe krażki (lub odwrotnie). Dobierając r i R tak, by stosunek r/R był liczbą wymierną z przedziału $(0, 1)$, możemy dostać krzywą zamkniętą o dowolnej, z góry zadanej, liczbie pętli. Dla r/R równego 0 lub 1 dostajemy, oczywiście, okręgi, a dla r/R będącego liczbą niewymierną z przedziału $(0, 1)$, dostajemy krzywą otwartą.

Rodzina krzywych cykloidalnych

Wszystkie krzywe, które możemy otrzymać za pomocą „magicznego krażka”, zajmują specjalne miejsce w matematyce. Wchodzą w skład licznej rodziny krzywych zwanych **ruletami**, tzn. krzywych, które dostajemy w wyniku toczenia się jednej figury po drugiej. Trochę ściślej, rulety są to trajektorie punktów sztywno związanych z jakąś krzywą, toczącą się po innej krzywej. Np. trajektorią ogniska paraboli toczącej się po prostej jest tzw. linia łańcuchowa, mająca kształt luźno zwisającego długiego łańcucha, którego oba końce umocowane są na tej samej wysokości.



Rys. 2

Trajektorią punktu prostej toczącej się po okręgu jest tzw. ewoluta okręgu. W kinematyce znane jest twierdzenie, które mówi, że każda krzywa otrzymana za pomocą mechanizmu przegubowego jest ruletą.

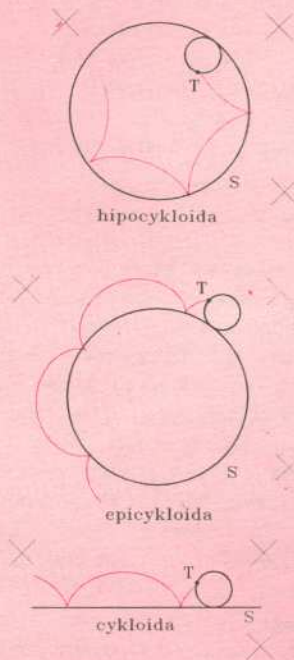


Rys. 3

Próżnia nie jest pusta

Stanisław MRÓWCZYŃSKI

Szczególnymi przypadkami rulet są krzywe, które powstają w wyniku toczenia się okręgu po okręgu. Nazywają się one **krzywymi cykloidalnymi**. Jeśli okrąg T toczy się po wewnętrznej stronie okręgu S (tak, jak w przypadku „magicznego krążka”), to każdy punkt sztywno związany z okręgiem T wykreśla krzywą zwaną **hipocykloidą**. Jeśli T toczy się po zewnętrznej stronie S , dostajemy **epicykloidę**. Jeśli T toczy się po prostej (która może być traktowana jako okrąg o nieskończeniu dużym promieniu) dostajemy **cykloidę**.



Rys. 4

Wszystkie krzywe, które powstają za pomocą „magicznego krążka”, są hipocykloidami. Łatwo wyobrazić sobie analogiczne zestawy służące do kreślenia epicykloid i cykloid.

Wszystkie krzywe cykloidalne mogą występować w trzech odmianach: **skróconej, zwyczajnej i wydłużonej**, w zależności od tego, jak punkt P kreślący krzywą położony jest względem okręgu T . Jeżeli P leży wewnątrz okręgu T , dostajemy odmianę skróconą (jak w „magicznym krążku”), jeżeli na okręgu – zwyczajną, jeżeli na zewnątrz – wydłużoną.

Epicykloidy i hipocykloidy wszystkich trzech odmian zwane są też **trochoidami**.

Pojęcie próżni gra podstawową rolę w kwantowej teorii pola – teorii, która na obecnym etapie poznania struktury materii dostarcza najbardziej podstawowego opisu dynamiki wszelkich układów fizycznych. W powszechnym rozumieniu próżnia to stan doskonalej pustki. Jednak „pustka” jest trudna do określenia w terminach fizycznych, więc w kwantowej teorii pola przyjmuje się, że próżni odpowiada stan o zerowej energii (dokładniej: o najniższej energii, gdyż energia jest zwykle określana z dokładnością do stałej addytywnej) i zerowych ładunkach: elektrycznym, leptonowym, barionowym itd. Na pierwszy rzut oka takie określenie zdaje się właśnie odpowiadać pustce, lecz dokładniejsze jego rozważenie pokazuje, że w próżni może jednak „coś” być.

Poniżej przedstawię bardzo uproszczony klasyczny (tzn. niekwantowy) model, który jednak opisuje pewne cechy realnej próżni. Wyobraźmy sobie parę złożoną z elektronu (e^-) i pozytonu (e^+). Ponieważ pozyton jest antycząstką elektronu, całkowite ładunki pary – elektryczny i leptonowy, są równe zeru. Od czasu zapisania słynnej formuły $E = mc^2$ wiadomo, że masa jest równoważna energii, a zatem wydaje się, że istnienie pary e^+e^- wymaga dostarczenia energii odpowiadającej, co najmniej, dwóm masom elektronu. Jednak elektron i pozyton mając przeciwne ładunki elektryczne przyciągają się, więc energia ich elektromagnetycznego oddziaływania jest ujemna i może skompensować energię potrzebną na generację mas. W układzie środka masy pary, gdzie pęd elektronu jest przeciwny do pędu pozytonu, żądanie zerowej całkowitej energii pary wygląda następująco

$$(1) \quad 2\sqrt{m^2 + p^2} - \frac{e^2}{r} = 0,$$

gdzie m jest masą elektronu, p jego pędem, e zaś ładunkiem elementarnym; r jest odległością między elektronem i pozytonem. Przyjęliśmy tutaj często stosowany w fizyce teoretycznej układ jednostek, w którym prędkość światła c i stała Plancka \hbar są równe jedności. Widzimy, że dla dowolnie dużego p istnieje rozwiązanie równania (1), gdyż człon odpowiadający elektrostatycznemu oddziaływaniu może być dowolnie duży.

Przedstawione rozumowanie pokazuje, że przestrzeń wypełniona parami e^+e^- , które w teorii pola nazywa się parami *wirtualnymi*, może odpowiadać stanowi o zerowej energii i ładunku, choć nie jest „pusta”. W teorii pola próżnię można wyobrażać sobie właśnie jako układ pojawiających się i znikających par, każda złożona z cząstki i antycząstki.

cykloida skrócona



cykloida zwyczajna



cykloida wydłużona



Rys. 5

Z równania (1) wynika, że maksymalna odległość między elektronem i pozytonem równa

$$(2) \quad r_{max} = \frac{e^2}{2m},$$

jest osiągnięta wtedy, gdy $p = 0$. Po podstawieniu wartości masy i ładunku elektronu otrzymujemy $r_{max} = 1,4 \cdot 10^{-13}$ cm. Wielkość ta jest bardzo mała, lecz odpowiada właśnie charakterystycznej skali długości w świecie cząstek elementarnych...Przypomnę, że promień protonu równy jest w przybliżeniu 10^{-13} cm. Oczekujemy więc, że istnienie w próżni par wirtualnych może wpływać na pewne zjawiska fizyczne. I tak się dzieje w istocie.

Gdy pole elektromagnetyczne rozchodzi się w próżni wypełnionej parami e^+e^- , jest ono zmodyfikowane w stosunku do sytuacji, w której pole rozchodzi się w idealnej „pustce”. (Ostatnie słowo ujęte jest w cudzysłów, gdyż, jak wynika z przeprowadzonego rozumowania, pojęcie pustki nie ma dobrego sensu fizycznego.) Dzieje się tak dlatego, że pole elektryczne indukuje moment elektryczny wirtualnej pary – średnie położenia elektronu i pozytonu nie pokrywają się, gdyż pole elektryczne działa w przeciwnych kierunkach na obdarzone przeciwnymi ładunkami elektron i pozyton. Tak więc próżnia polaryzuje się, czyli zachowuje się jak ośrodek dielektryczny.

Efekty wynikające z polaryzacji próżni są bardzo małe. Aby uzmysłowić sobie, jak małe, porównajmy momenty elektryczne pary wirtualnej i typowej molekuly. Charakterystyczny promień d molekuly wynosi 10^{-8} cm, więc moment elektryczny molekuly będzie rzędu $e \cdot d$, gdzie e jest ładunkiem elementarnym. Moment elektryczny wirtualnej pary będzie rzędu $e \cdot r_{max}$. A zatem moment pary jest sto tysięcy razy mniejszy niż moment typowej molekuly. Pomimo to efekty polaryzacji próżni są obserwowane doświadczalnie.

Atom wodoru – układ elektronu i protonu związanych przyciągającym potencjałem Coulomba, jest opisywany przez mechanikę kwantową, na gruncie której pokazano, że tylko pewne wartości energii atomu są dozwolone. Wartości te, zwane poziomami energii atomu wodoru, mierzone są z ogromną precyzją. Okazuje się, że fakt istnienia wirtualnych par w próżni, a co za tym idzie, efekt polaryzacji próżni, prowadzi do przesunięcia poziomów energetycznych, na skutek modyfikacji potencjału działającego między elektronem i protonem. Potencjał ten przy wzroście odległości zmniejsza się szybciej niż $1/r$, ponieważ pole elektryczne jest w próżni, jak i w innych ośrodkach dielektrycznych, ekranowane. Wspomniane przesunięcia poziomów energetycznych atomu wodoru zostały zmierzone i doskonale zgadzają się z wynikami teorii.

Ciekawi przedstawiciele rodziny cykloid

Niektóre krzywe cykloidalne wyróżniają się szczególnie ciekawymi własnościami. Wśród epicykloid są to kardioda i nefroida, a wśród hipocykloid – deltoid i asteroida (rys. 6). Własności nefroidy ($r/R = 1/2$) wykorzystuje się w urządzeniach optycznych, a kardiody ($r/R = 1$) w urządzeniach optycznych, mimośrodowych i w przekładniach zębatych. Deltoid ($r/R = 1/3$), zwany też trójkątem Steinera, jest figurą, w której obszarze można obrócić odcinek o długości $2r$ o kąt pełny. Początkowo sądzono, że jest on najmniejszą spośród figur o tej własności, ale okazało się, że można znaleźć taką figurę o dowolnie małej powierzchni. Asteroida ($r/R = 1/4$) natomiast słynna jest jako obwiednia odcinka o długości $R/2$, którego końce ślizgają się po dwóch prostopadłych prostych.

Najbardziej jednak interesująca jest chyba cykloida, którą zajmiemy się później.

Wśród trochoid dużą popularnością cieszą się rozety trochoidalne i ślimaki Pascala. Rozety (rys. 6) są to trochoidy, dla których odległość punktu kreślącego od środka toczącego się koła wynosi $r + R$. Interpretowane są też jako trajektorie punktu poruszającego się w sposób harmoniczny (tam i z powrotem) po prostej obracającej się ze stałą prędkością wokół środka wahań punktu. Ślimaki Pascala natomiast są to epitrochoidy, dla których $r = R$ (czyli kardiody zwyczajne, skrócone i wydłużone). Wchodzą one w skład trysektry. Za pomocą cyrkla, linijki i szablonu trysektry można dokonać podziału dowolnego kąta na trzy równe części (wiadomo, że za pomocą jedynie cyrkla i linijki nie jest to możliwe). Kształt ślimaków Pascala nadaje się też mimośrodom w semaforach, dzięki czemu prędkość ruchu ramienia semafora jest maksymalna w środkowej fazie ruchu,



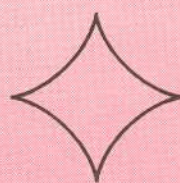
kardioda



nefroida



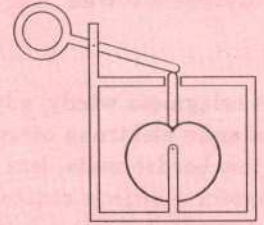
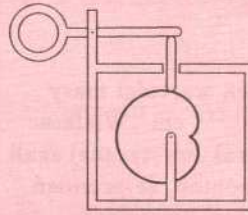
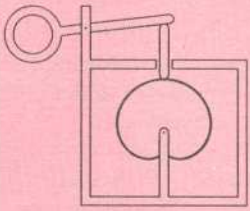
deltoid



asteroida



rozeta



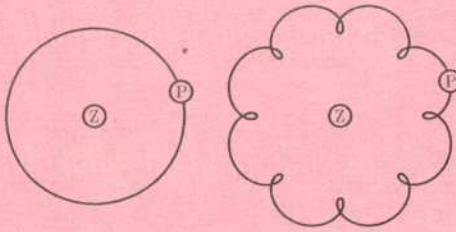
Rys. 7

a minimalna w początkowej i końcowej. Tego rodzaju płynność ruchu zabezpiecza urządzenie przed szybkim zużyciem oraz ułatwia przezwyciężenie siły bezwładności i siły tarcia w chwili rozruchu.

Historia krzywych cykloidalnych

Krzywymi cykloidalnymi interesowano się już od dawna. Już Arystoteles (384–332 p.n.e.) zajmował się różnymi paradoksami dotyczącymi toczenia się koła po prostej. Później Apoloniusz (około 262–200 p.n.e.) dla celów astronomicznych badał właściwości ruchu złożonego z ruchów kilku okręgów wzajemnie związanych. Opierając się na jego wynikach Hipparch (około 190–około 125 p.n.e.) wprowadził do opisu ruchu planet orbity epicykloidalne.

Za czasów Hipparcha przeważnie sądzono, że planety poruszają się wokół Ziemi z jednostajną prędkością po orbitach kołowych. Przeczyły temu jednak obserwacje, które wykazały, że niektóre planety (np. Mars i Wenus) w nieustannym ruchu z zachodu na wschód poruszają się raz wolniej, raz szybciej, ponadto co jakiś czas cofają się nieco na zachód, wykonują pętlę i dalej biegną ku wschodowi. Wprowadzenie orbit epicykloidalnych umożliwiło wytłumaczenie tego zjawiska, ponieważ epicykloidy wydłużone mają pętle, na których, oczywiście, zachodzi ruch wsteczny.



orbita kołowa

orbita epicykloidalna

Rys. 8

Czy próżnia jest pusta?

Zaprezentowany w tym numerze artykuł S. Mrówczyńskiego *Próżnia nie jest pusta* pobudził redakcję *Delfy* do ożywionej dyskusji, u piszącego zaś te uwagi wywołał gwałtowny sprzeciw. Wobec niemożności pogodzenia stanowisk dwóch reprezentantów fizyki w redakcyjnym gronie postanowiliśmy – idąc za sugestią Naczelnego – zaprezentować poglądy obydwu stron. A zatem: **NIE ZGADZAM SIĘ Z PREZENTOWANYM MODELEM ZJAWISK ZACHODZĄCYCH W PRÓŻNI.** Zanim przystąpię do wyłuszczenia powodów mego sprzeciwu, chciałbym najpierw wyjaśnić, jak w ogóle możliwa jest sytuacja, w której sposób opisu zjawiska fizycznego zależy od widzimisię osoby opisującej: wszak fizyka pretenduje do miana nauki ścisłej. Otóż kluczem do zrozumienia jest tu słowo „model”, świadomie użyte przeze mnie w wyróżnionym zdaniu, a pojawiające się także w drugim akapicie tekstu mego (miejmy nadzieję – chwilowego) adwersarza.

Czym jest model? Fizyka badając naturę nie jest na ogół w stanie sprostać jej złożoności. Skazana jest na maksymalne upraszczanie okoliczności i sprowadzanie zjawisk do warunków laboratoryjnych. Ale nawet wówczas, aby ująć opis rzeczywistości w kluby pojęć matematycznych, trzeba uciec się do pewnej idealizacji, konstrukcji myślowej, która oddaje jedynie najistotniejsze cechy badanego. Ta konstrukcja to właśnie model. Spotykamy się z nim już od początków nauczania fizyki. Modelem obiektu materialnego, którego rozmiary są małe w porównaniu z zakresem jego ruchu, jest punkt materialny. Modelem ciężarka bujającego się na cienkiej nitce jest wahadło matematyczne. Znamy model gazu doskonałego, model atomu Bohra-Rutherforda i wiele, wiele innych. Z założenia model nie pretenduje do roli pełnego opisu modelowanego zjawiska: albo oddaje tylko pewne jego cechy (model wahadła matematycznego opisuje ruch ciężarka, ale nie mówi nic np. o jego własnościach cieplnych), albo może być stosowany tylko w pewnych, ściśle sprecyzowanych warunkach (model punktu materialnego opisuje ruch Ziemi wokół Słońca, ale nie jej ruch dobowy). Ponieważ w wielu przypadkach nie jest oczywiste, jakie cechy rzeczywistości są istotne dla przebiegu zjawiska, a jakie nie, więc zbudowanie poprawnego modelu nie jest bynajmniej proste – **fizyka jest sztuką odrzucania tego, co mniej ważne.** I właśnie w tym miejscu wkracza do fizyki pewna dowolność indywidualnego osądu; spory o słuszność tego czy innego modelu są charakterystyczne dla dziedzin fizyki znajdujących się w trakcie tworzenia.

Cóż więc mam do zarzucenia modelowi próżni przedstawionemu przez Staszka Mrówczyńskiego? Otóż, moim zdaniem, poprawny model nie może być wewnętrznie sprzeczny, a model, o którym mowa, kryterium tego nie spełnia. Po pierwsze, równanie (1) nie jest prawdziwe! Założenie, które legło u podstaw równania (1), że elektrony i pozytony oddziałują na siebie siłą Coulomba jest słuszne jedynie w przypadku statycznym, a nie wówczas, gdy obydwie cząstki krążą wokół siebie z prędkością bliską prędkości światła. W tym przypadku zagadnienie staje się niezmiernie skomplikowane i w ogólności – nierozwiązywalne. Zastrzeżenia dotyczące równania (1) nie są jednak decydujące. Równanie to, jak i wynikający z niego wzór (2) dadzą się utrzymać, jeśli znaki równości zastąpić równościami przybliżonymi lub równościami co do rzędu wielkości.

Znacznie poważniejszy jest następujący fakt: opisany stan nie jest stanem próżni, gdyż jego energia nie jest najniższa z możliwych. Co więcej, nie jest to stan stabilny. Istotnie, elektron i pozyton poruszają się z niezłowymi przyspieszeniami i – jak zwykle w takich przypadkach – tracą energię promieniując fale elektromagnetyczne, by po bardzo krótkim czasie spaść na siebie. Gdybyśmy jednak obeszli i tę trudność postulując istnienie pewnych dozwolonych orbit (nie podlegających klasycznemu prawu promieniowania) tak, jak w modelu Bohra atomu, to musielibyśmy wziąć jeszcze pod uwagę i to, że równanie typu (1) określa jedynie wkład do energii pochodzący od energii oddziaływania elektronu i pozytonu. Tymczasem w bilansie energii musimy uwzględnić także energie zawarte w polach elektrycznych wytworzonych przez obydwa ładunki. Energie te są nieskończenie duże i fakt ten prowadzi nas do nieuniknionego wniosku, że poprawnym stanem próżni w fizyce klasycznej jest stan pozbawiony jakichkolwiek obiektów materialnych – absolutna pustka.

Inaczej jest jednak w fizyce kwantowej, w szczególności, jeśli odwołać się do kwantowej teorii pola. Tutaj cząstki są jedynie wzbudzeniami wszechobecnych pól kwantowych, których usunąć się po prostu nie da, nawet ze stanu o najniższej możliwej energii. Co więcej, jedno z podstawowych praw fizyki kwantowej, zasada nieoznaczoności, mówi nam, że pola kwantowe nigdy nie mogą być w doskonałym bezruchu, lecz muszą one fluktuować. Fluktuacje te kreuują pary cząstka – antycząstka. Dzieje się to jednak na bardzo małych odległościach. Możemy się o tym przekonać wypisując zasadę nieoznaczoności w postaci

$$\Delta p \cdot \Delta x \sim \hbar$$

(Δp i Δx to nieoznaczoności pędu i położenia). Dla pary wykreowanej przez pole kwantowe nieoznaczoności pędu i położenia muszą być rzędu samych wielkości i wobec faktu, że $\Delta p \sim p \sim mc$, znajdujemy charakterystyczny rozmiar pary

$$\Delta x \sim \frac{\hbar}{mc},$$

co w przypadku elektronu daje liczbę rzędu 10^{-11} cm (porównaj $\lambda r_{max} \sim 10^{-13}$ cm w modelu klasycznym). Zauważmy, że przy tym opisie, stworzenie pary elektron-pozyton narusza – niewzruszone zdawałoby się – zasady zachowania energii i pędu. Dzieje się to jednak nie tylko na bardzo małych odległościach, ale również przez bardzo krótki czas (przypomnijmy zasadę nieoznaczoności dla energii, $\Delta E \cdot \Delta t \sim \hbar$). Natura oszukuje więc samą siebie, a udaje się jej to, gdyż jest niesłychanie zręczną oszustką.

Kwantowa próżnia jawi się jako stan niezwykle niespokojny. W każdym jej milimetrze sześciennym rodzą się wciąż i nieomal natychmiast giną niezliczone ilości wirtualnych par. Podobnie jednak, jak w modelu klasycznym, ich krótkotrwałe istnienie prowadzi w obecności zewnętrznego pola elektrycznego do pojawienia się efektów polaryzacyjnych. I ten właśnie fakt opisywał poprawnie (choć tylko na poziomie jakościowym) model Staszka Mrówczyńskiego. By nie być zupełnie gołosłownym, przytoczę wzór na potencjał ładunku punktowego otrzymany w kwantowej teorii pola

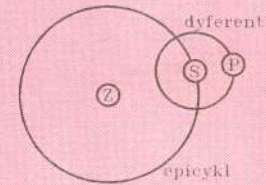
$$(*) \quad \Phi(r) \simeq \frac{e}{r} \left(1 + \frac{e^2}{4\sqrt{\pi}} \frac{e^{-2mr}}{(mr)^{3/2}} \right) \quad \text{dla } r \ll \frac{1}{m}$$

(przyjąłem tu jednostki, dla których $\hbar = c = 1$).

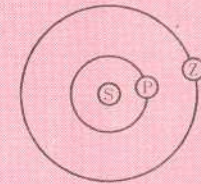
Czy próżnia jest więc pusta? Na pewno jest tak pusta, jak to tylko możliwe. Ale prawdziwa odpowiedź na to pytanie nie jest jednoznaczna i zależy od sposobu opisu oddziaływania. Przyjmując wzór (*) za prawo podstawowe doszlibyśmy zapewne do przekonania, że próżnia jest zupełną pustką. W pewnym sensie możemy więc mówić wymiennie albo o prostym oddziaływaniu, albo o prostym stanie próżni. Pierwszy sposób opisu rzeczywistości wydaje się być dużo bardziej płodny poznawczo i z tego powodu skłonni jesteśmy uznać, że próżnia jednak pusta nie jest.

Paweł KRAWCZYK

Dzisiaj wiadomo, że planety krążą wokół Słońca, a nie odwrotnie, orbity zaś mają kształt elips, a nie kół. Gdyby planety krążyły wokół Słońca po torach kołowych, to model Hipparcha byłby idealnie poprawny. No, bo jeśli za punkt odniesienia przyjąć Ziemię, wówczas Słońce wraz z planetą, którą ma na swojej orbicie, wirują wokół Ziemi (rys. 9) i wtedy ruch planety istotnie jest ruchem złożonym z ruchu po orbicie wokół Słońca (zwanej deferentem) i ruchu Słońca po orbicie wokół Ziemi (zwanej epicyklem). Oba te ruchy złożone razem dają ruch po epicykloidzie, co będzie jeszcze wyjaśnione później.



model geocentryczny



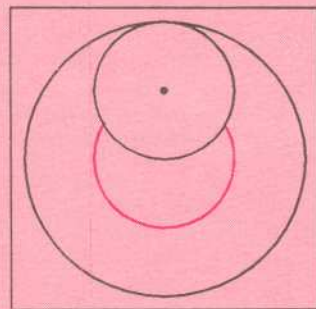
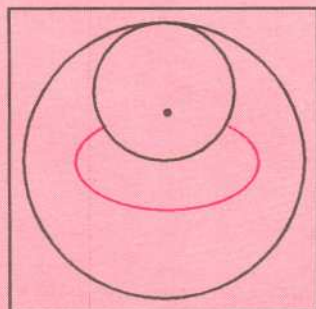
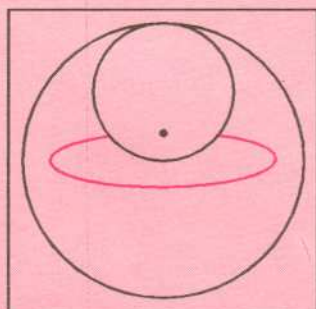
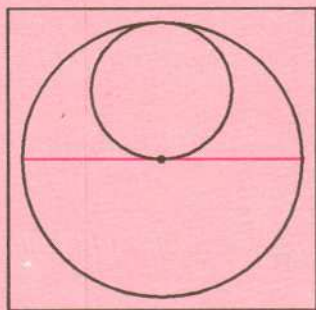
model heliocentryczny

Rys. 9

Nad ulepszeniem modelu Hipparcha pracował Ptolemeusz (około 85–165). Wprowadzając mnóstwo dodatkowych epicykli stworzył model systemu planetarnego tak dokładny, że przetrwał on ponad 16 stuleci, aż do czasu heliocentrycznego systemu Kopernika (1473–1543). Ale nawet Kopernik uległ magii krzywych cykloidalnych. Gdy pierwotny jego model, zakładający orbity kołowe w ruchu planet wokół Słońca okazał się niezbyt dokładny, zdecydował się powrócić do orbit cykloidalnych, często też z wielką liczbą epicykli. Dopiero Kepler (1571–1630) uwniósł system planetarny Kopernika od krzywych cykloidalnych, zastępując je elipsami.

Kopernik posługując się krzywymi cykloidalnymi odkrył ciekawą ich własność. Mianowicie można znaleźć taki stosunek promieni r/R , że krzywa cykloidalna będzie swoim kształtem przedstawiała okrąg – orbitę planety, a nawet odcinek – tor ruchu komety. Wystarczy wziąć „magiczny krążek”, dla którego $R = 2r$.

W zależności od tego, w którym otworze umieścimy koniec ołówka, dostaniemy dowolną elipsę „szeroką” lub „wąską”, a w granicznych przypadkach okrąg i odcinek.



Rys. 10

Cykloida

Od XVI w. zaczęło się bardziej intensywne badanie krzywych cykloidalnych. W XVII w. uwaga matematyków skupiła się przede wszystkim na samej cykloidzie. Z powodu pięknych własności zarówno geometrycznych, jak i technicznych okazała się ona wdzięcznym przedmiotem badań i szybko zyskała sobie dużą popularność.

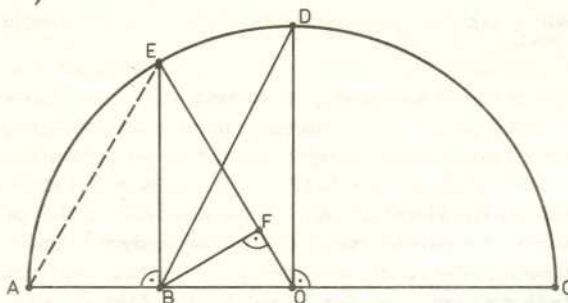
Geometryczny dowód pewnej nierówności

Pomiędzy średnimi: harmoniczną, geometryczną, arytmetyczną i kwadratową dwóch dodatnich liczb rzeczywistych x, y zachodzi następująca zależność:

$$\min(x, y) \leq \sqrt{x \cdot y} \leq \frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \leq \max(x, y).$$

Czy można wskazać geometryczną interpretację (geometryczny dowód) tej nierówności?

Niech $|AB| = x$, $|BC| = y$, ($x < y$), $|AC| = x + y$. Na odcinku AC , jako na średnicy, rysujemy półokrąg i zaznaczamy odcinki $OD \perp AC$, $BE \perp AC$ (rysunek).



Oczywiście, $|OD| = \frac{x+y}{2}$, $|BE| = \sqrt{x \cdot y}$, $|OB| = \frac{y-x}{2}$. Ponadto

$$|BD| = \sqrt{OD^2 + OB^2} = \sqrt{\frac{1}{4}(x+y)^2 + \frac{1}{4}(y-x)^2} = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

Rysujemy teraz odcinek $BF \perp OE$. Ponieważ

$$|BE|^2 = |EO|^2 - |OB|^2 \quad \text{i} \quad \frac{|BO|}{|FO|} = \frac{|EO|}{|BO|},$$

więc $|BE|^2 = |EF| \cdot |EO|$. Stąd

$$|EF| = \frac{|BE|^2}{|EO|} = \frac{x \cdot y}{\frac{x+y}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}.$$

W równoramiennym trójkącie AOE , $BF \parallel AE$, więc $|AB| < |EF|$. Z rysunku widać, że

$$|AB| \leq |EF| \leq |EB| \leq |DO| \leq |DB| \leq |BC|$$

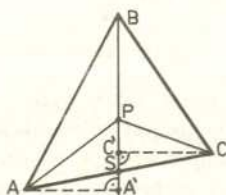
(równości mają miejsce tylko w przypadku, gdy $x = y$).

Jarosław GÓRNICKI



Rozwiązanie zadania M 604.

Oznaczmy rzut prostokątny punktu A na prostą BP przez A' , a punktu C - przez C' . Niech S będzie punktem przecięcia prostej BP z bokiem AC . Ponieważ pola $\triangle PBA$ i $\triangle PBC$ są równe, więc wysokości opuszczone na wspólny bok BP w tych trójkątach też będą równe.

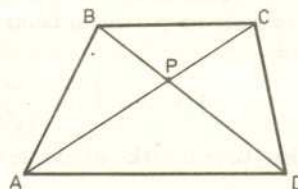


Zatem $AA' = CC'$ i wobec tego trójkąty prostokątne $AA'S$ i $BB'S$ są przystające (mają jeszcze równe kąty przy wierzchołku S). Stąd $AS = SC$, a więc BP jest środkową. Podobnie stwierdzamy, że środkowymi są AP i CP .



Rozwiązanie zadania M 605.

Trójkąty ABP i CDP mają jednakowy kąt przy wierzchołku P - oznaczmy go α .



Ponieważ ich pola są równe, więc

$$\frac{1}{2} \cdot AP \cdot BP \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot CP \cdot DP \cdot \sin \alpha.$$

Stąd

$$\frac{AP}{DP} = \frac{CP}{BP}$$

i trójkąty APD i CPB są podobne (bo mają też jednakowy kąt przy wierzchołku P). W szczególności $\angle PAD = \angle PCB$, co dowodzi równoległości AD i BC .

O pewnych funkcjach okresowych i ich okresach podstawowych

Ewa DUDEK

Zacznijmy od pewnego zadania:

Udowodnij, że jeśli dla funkcji $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ istnieje $a \neq 0$, takie, że dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$: $f(x+a) = g(x)$ oraz $g(x+a) = -f(x)$, to f i g są okresowe.

Przypomnijmy: mówimy, że $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest okresowa wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $T \neq 0$, takie, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi związek: $F(x+T) = F(x)$; takie T nazywamy okresem funkcji F (najczęściej to pojęcie definiowane jest trochę inaczej, ale w sposób równoważny).

Rozwiązanie zadania jest proste:

dla $x \in \mathbb{R}$ mamy $f(x+4a) = g(x+3a) = -f(x+2a) = -g(x+a) = f(x)$. Liczba $T = 4a \neq 0$ jest okresem funkcji f , g zaś jako przesunięcie f o wektor $[-a, 0]$ ma te same własności. Zauważmy, że przykładami funkcji spełniających założenia są sinus i cosinus (dla $a = \frac{\pi}{2}$).

Zadanie rozwiązaliśmy i w zasadzie jego historia, a wraz z nią niniejszy artykuł, mogłyby się tu urwać. Dlaczego więc Czytelnik ma przed sobą jeszcze spory kawałek tekstu? Z tej samej przyczyny, dla której policjant, zauważający zamaskowanego i obladowanego tobołkami człowieka opuszczającego w środku nocy jakieś mieszkanie przez balkon, nie zadawała się jedynie stwierdzeniem tego faktu, ale zatrzymuje podejrzanego i zadaje mu pewne standardowe dla tych okoliczności pytania. Takimi pytaniami w sytuacji, w której „złapiemy” funkcję okresową, są:

- (I) czy ta funkcja ma okres podstawowy?
- (II) jeśli ma, to jaki?

Przypomnijmy, że okresem podstawowym nazywamy (o ile istnieje) najmniejszy spośród dodatnich okresów. Funkcja okresowa może mieć okres podstawowy (np. funkcje trygonometryczne) albo go nie mieć (np. dla każdej funkcji stałej okresem jest każda liczba różna od zera). Znana jest ponadto bardzo prosta własność: *niezerowa suma i różnica okresów też jest okresem*. W szczególności, jeśli T jest okresem funkcji, to są nimi również liczby: $\pm T, \pm 2T, \dots$

Jak brzmi odpowiedź na pytania (I) i (II) w przypadku funkcji z zadania? Zauważmy, że wystarczy zająć się funkcją $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (g jest jej przesunięciem, więc ma analogiczne własności), dla której

- (0) istnieje $b > 0$ ($b = 2a$), takie, że dla $x \in \mathbb{R}$: $f(x+b) = -f(x)$ (takich b może być wiele; zbiór złożony z nich wszystkich oznaczmy przez B).

Spróbujmy odpowiedzieć na pytanie (II) przyjmując, że funkcja f o własności (0) ma okres podstawowy T_0 . Jak go wyznaczyć? Wiemy, że

- (i) istnieje $x_0 \in \mathbb{R}$, takie, że $f(x_0) \neq 0$ (w przeciwnym razie f byłaby stała, tzn. nie miałaby okresu podstawowego);
- (ii) żadne $b \in B$ nie jest okresem (bo dla x_0 z punktu (i) mamy: $f(x_0+b) = -f(x_0) \neq f(x_0)$);
- (iii) dla każdego $b \in B$ liczba $2b$ jest okresem.

Ostatnia uwaga nasuwa pomysł: skoro szukamy najmniejszego dodatniego okresu T_0 , a wszystkie liczby $2b$ ($b \in B$) są dodatnimi okresami, to może

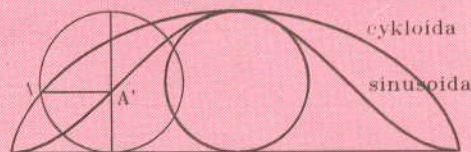
$$(1 - hipoteza) \quad T_0 = \min\{2b : b \in B\} = 2 \cdot \min B,$$

gdzie $\min B$ jest liczbą najmniejszą w B ? Co wystarczyłoby wiedzieć, by móc uzasadnić hipotezę (1)? Gdyby dla jakiegokolwiek $b_0 \in B$ było

$$(2) \quad T_0 = 2b_0,$$

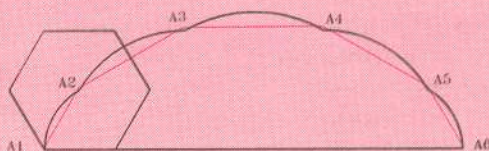
to już byłoby dobrze. Takie b_0 musi już być najmniejsze w B (dzięki (iii)).

Jako pierwszy badaniem cykloidy zajął się Galileusz (1564–1642). On nadał jej nazwę, sformułował jej definicję i zainteresował nią innych matematyków. Ważąc figury wycięte z jednakowych materiałów odkrył, że pole pod jedną gałęzią cykloidy jest trzykrotnie większe od pola koła generującego tę cykloidę. Matematyczny dowód tego faktu znaleziony został później przez Robervala (1602–1675). W swoim dowodzie posłużył się on krzywą pomocniczą, którą nazwał „towarzyszką cykloidy”. Konstruował ją w ten sposób, że w każdej chwili, kiedy koło toczyło się po prostej, rzutował punkt kreślący cykloidę na pionową średnicę koła. Trajektorię tego rzutu nazwał właśnie „towarzyszką cykloidy”. Okazała się ona wykresem funkcji sinus i w taki właśnie sposób w historii matematyki po raz pierwszy pojawiła się sinusoida. Roberval pokazał, że pole koła generującego jest równe polu obszaru ograniczonego cykloidą i jej „towarzyszką”, a to z kolei jest równe polu obszaru ograniczonego podstawą cykloidy, jej „towarzyszką” i brzegiem koła generującego wpisanego w cykloidę. Tym samym udowodnił, że pole pod cykloidą jest trzykrotnie większe od pola koła generującego tę cykloidę (rys. 11). Tego samego dowiedli również Kartezjusz (1596–1650) i Fermat (1601–1665), którzy zaciekle rywalizowali z Robervalem w badaniu własności cykloidy.



Rys. 11

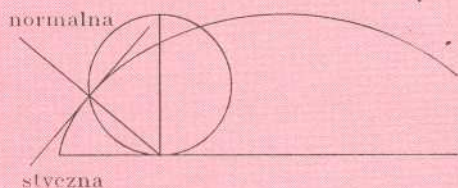
Ciekawe, że podobne twierdzenie o polu jest prawdziwe dla dowolnego wielokąta foremnego toczącego się po prostej. Mianowicie pole pod łamaną $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ jest trzykrotnie większe od pola n -kąta generującego tę łamaną.



Rys. 12

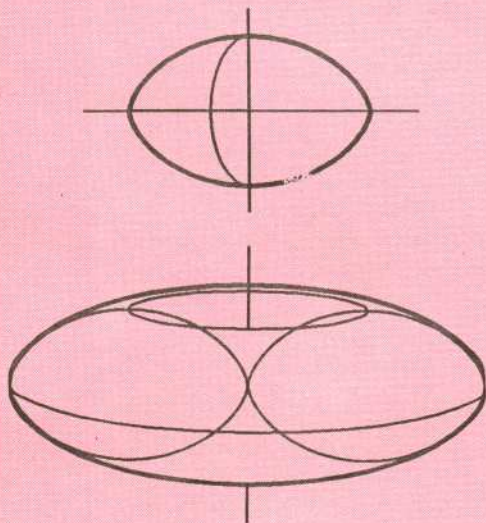
Roberval, Kartezjusz i Fermat znaleźli również metodę konstruowania stycznej i normalnej do cykloidy w dowolnym jej

punkcie. Otóż normalną należy prowadzić przez punkt styczności koła generującego – z prostą, po której ono się toczy, a styczną przez przeciwny temu punktowi koniec średnicy.



Rys. 13

Wdzięcznym przedmiotem badań okazały się również bryły utworzone przez obrót gałęzi cycloidy wokół podstawy lub wokół prostej prostopadłej do podstawy w jednym z jej końców (rys. 14). Ich objętości wynoszą odpowiednio $5\pi^2 r^3$ i $12\pi r^3$, a pola $\frac{64}{3}\pi r^2$ i $32\pi^2 r^2$. Badane były przede wszystkim przez Robervalą, Fermatą i Pascala.



Rys. 14

Pascal (1623 – 1662) znalazł środki ciężkości gałęzi cycloidy i obszaru pod gałęzią cycloidy. Leżą one na osi symetrii cycloidy na wysokościach odpowiednio $\frac{3}{4}r$ i $\frac{5}{6}r$ ponad podstawą.

Pascal znalazł również pola pewnych specjalnych fragmentów obszaru pod cycloidą i ich środki ciężkości, a także środki ciężkości pewnych fragmentów opisywanych wyżej brył. Dumny ze swych osiągnięć ogłosił konkurs na rozwiązanie tych i podobnych zadań. Jednak problemy te były jak na tamte czasy ogromnie trudne i niewielu spośród najwybitniejszych matematyków uczestniczących w konkursie mogło poszczycić się jakimkolwiek sukcesem.

Dalej, wiemy, że liczby $2b - T_0$ (dla $b \in B$) są zerami lub dodatnimi okresami, większymi (dzięki (ii) różnymi) od T_0 . Gdyby więc liczba tej postaci spełniała warunek

$$(3) \quad 2b - T_0 \leq T_0,$$

to musiałaby być zerem, co oznaczałoby, że $2b - T_0 = 0$, czyli $T_0 = 2b$. Zachodziłby więc upragniony związek (2)! No dobrze, ale kiedy możliwy jest (3)? Oczywiście, gdy dla pewnego $b \in B$ zachodzi $b \leq T_0$. Czy istnieje takie $b \in B$? Spróbujmy uzasadnić to nie wprost. Przypuśćmy, że jest przeciwnie:

$$(4 - \text{hipoteza}) \quad \text{dla każdego } b \in B: b > T_0.$$

Weźmy jedno takie $b \in B$ i wykonajmy coś w rodzaju dzielenia z resztą przez T_0 , tzn. przedstawmy b jako $b = kT_0 + q$, gdzie $k \in \{1, 2, \dots\}$ oraz $0 \leq q < T_0$ (q to „reszta”). Zauważmy, że kT_0 jest okresem, q zaś ma ciekawą własność:

$$\text{dla wszystkich } x \in \mathbb{R}: f(x + q) = f(x + b - kT_0) = f(x + b) = -f(x).$$

Po przypomnieniu sobie definicji zbioru B z punktu (0) stwierdzimy, że zachodzi jedno z dwojga:

$q = 0$; jest to jednak niemożliwe, bo wtedy $b = kT_0$ byłoby okresem, a nie jest (patrz (ii));

$q \in B$, ale $q < T_0$, a zgodnie z hipotezą (4) wszystkie elementy B są większe od T_0 .

Przyjęcie hipotezy (4) prowadzi – tak czy inaczej – do sprzeczności. Stąd prawdziwość jej zaprzeczenia. Istnieje zatem $b_0 \in B$ takie, że $b_0 \leq T_0$. To wystarczy, by zachodziło (3) oraz (2), które dowodzi, że hipoteza (1) jest odpowiedzią na PYTANIE (II):

$$\text{jeśli } f \text{ ma okres podstawowy, to jest nim } T_0 = 2 \cdot \min B.$$

Zgodnie z przyjętym planem pozostaje udzielić odpowiedzi na PYTANIE (I), czyli stwierdzić, czy własność (0) wymusza istnienie okresu podstawowego. Przywołując przykład funkcji zerowej odpowiemy, że NIE. Sformułujmy więc pytanie (I) inaczej:

(I') czy niezerowa funkcja o własności (0) musi mieć okres podstawowy?

Odpowiedź nadal brzmi: NIE; odpowiedni przykład nie jest jednak już tak prosty. Aby go skonstruować wyróżnimy dwa podzbiory \mathbb{R} . Zbiór

$$X \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \frac{k}{3^n} : k = 0, \pm 1, \dots, n = 0, 1, \dots \right\}$$

tworzą liczby wymierne o mianownikach postaci 3^n ($n = 0, 1, \dots$).

Zauważmy, że liczby całkowite (w tym 1) leżą w X , oraz że suma liczb z X także leży w tym zbiorze. Drugi z zapowiedzianych zbiorów

$$Y \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \frac{1}{2} + x : x \in X \right\}$$

jest przesunięciem X o $\frac{1}{2}$.



Rozwiązanie zadania F 810.

Niech q oznacza ładunek, jaki zgromadzi się na kondensatorze, a C jego pojemność. Energia pobrana z baterii równa się Uq , natomiast energia naładowanego kondensatora jest równa $\frac{1}{2}Uq$. Różnica powyższych energii równa jest ciepłu, jakie wydzieli się na oporze: $Q = \frac{1}{2}Uq$. Ponieważ $q = CU$, więc otrzymujemy $C = \frac{2Q}{U^2}$.



Rozwiązanie zadania F 811.

Niech S_0 i S oznaczają przekrój strumienia w pobliżu kranu

i w odległości $h = 60$ cm poniżej kranu. Prędkości strumienia wody niech wynoszą odpowiednio U_0 i U . Ponieważ gęstość wody nie zmienia się, przez dany przekrój musi przepływać w jednostce czasu ta sama objętość wody: $\frac{dV}{dt} = \text{const}$, ale $\frac{dV}{dt} = SU = S_0U_0$. Uwzględniając, że $S/S_0 = 2$ mamy $U = 2U_0$. Z zasady zachowania energii mamy

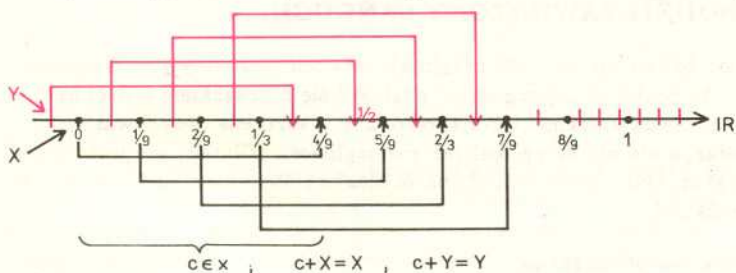
$$\frac{mU^2}{2} - \frac{mU_0^2}{2} = mgh.$$

Rozwiązując ostatnie dwa równania otrzymujemy

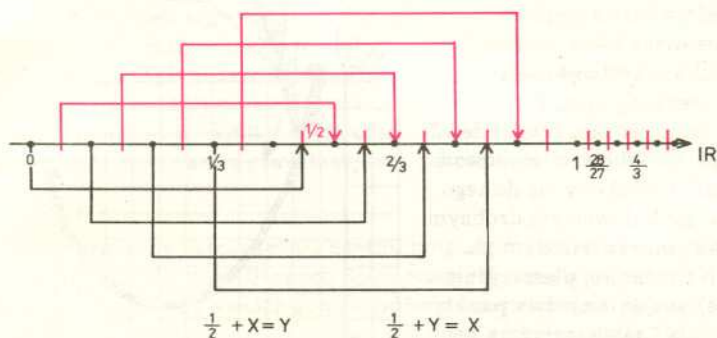
$$U_0 = \sqrt{\frac{2}{3}gh} \approx 2 \text{ m/s}.$$

Oto niektóre własności tych zbiorów:

- (A) $X \cap Y = \emptyset$ (gdyby $z \in X$ było postaci $z = \frac{1}{2} + x$ dla $x \in X$, to mielibyśmy: $\frac{1}{2} = z - x \in X$; tak, oczywiście, nie jest); zatem rozbiliśmy \mathbb{R} na trzy rozłączne części: $X, Y, \mathbb{R} \setminus (X \cup Y)$;
 (B) przy przesunięciu o liczbę ze zbioru X zbiory X i Y oraz $\mathbb{R} \setminus (X \cup Y)$ „nasuwają się” każdy na siebie (patrz: własności X i rysunek);



- (C) przy przesunięciu o $\frac{1}{2}$ zbiór X przechodzi na Y , Y na X ; zatem $\mathbb{R} \setminus (X \cup Y)$ przechodzi na siebie.



Uzbrojeni po zęby w różnorakie własności X i Y możemy w końcu podać zapowiadany przykład. Jest nim następująca funkcja:

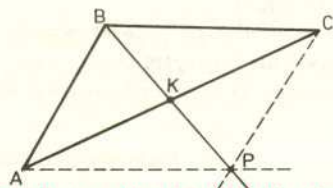
$$f(x) = \begin{cases} 1; & x \in X \\ -1; & x \in Y \\ 0; & x \in \mathbb{R} \setminus (X \cup Y). \end{cases}$$

Jest to funkcja niezerowa, ponadto dla $b = \frac{1}{2}$ spełnia warunek (0). Istotnie, dla $x \in X$, zgodnie z (C), $\frac{1}{2} + x \in Y$, czyli $f(x) = 1$, $f(\frac{1}{2} + x) = -1$; ostatecznie $f(x + \frac{1}{2}) = -f(x)$. Dla $x \in Y$ i $x \in \mathbb{R} \setminus (X \cup Y)$ postępujemy podobnie. Równie szybko uzasadniamy, że dowolne $T \in X \setminus \{0\}$ jest okresem f . Dla argumentu $x \in Y$ mamy, dzięki (B), $x + T \in Y$, co oznacza, że $f(x) = -1 = f(x + T)$; w pozostałych przypadkach rozumowanie jest analogiczne. Wśród dodatnich okresów f znajdują się: $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{27}, \dots$, zatem f nie ma okresu podstawowego.



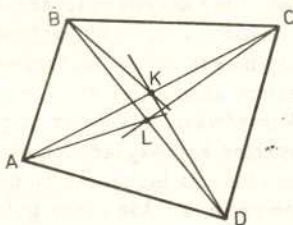
Rozwiązanie zadania M 606.

Ponieważ pola trójkątów ABP i BCP są równe, więc punkt P musi leżeć na prostej BK , gdzie K jest środkiem przekątnej AC (porównaj rozwiązanie zadania M 604).



Podobnie z równości pól trójkątów CDP i DAP wynika, że P leży na DK , z równości pól ABP i DAP – że leży na AL (gdzie L jest środkiem

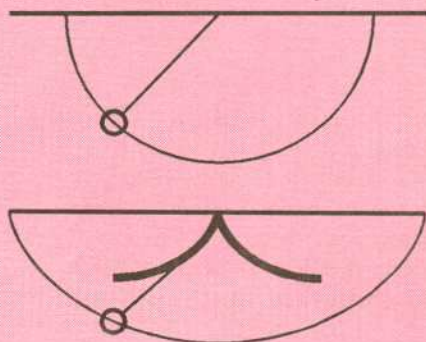
przekątnej BD), z równości pól BCP i CDP – że leży na CL .



Warunki te nie są sprzeczne tylko wtedy, gdy proste BK i DK lub proste AL i CL pokrywają się, ale to dowodzi tezy zadania (np. gdy proste BK i DK pokrywają się, punkt K leży na BD).

Wkrótce potem Wren (1632–1723) obliczył, że długość gałęzi cycloidy jest ośmiokrotnie większa od promienia koła generującego. Jego wynik wzbudził wielką sensację. Po pierwsze dlatego, że do tamtego czasu matematykom udało się obliczyć jedynie długość okręgu, paraboli i spirali. Po drugie nikt nie wierzył, że długość łuku krzywej może być współmierna z długością odcinka prostej.

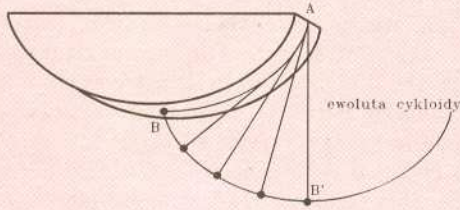
Jednym z większych problemów XVII wieku było mierzenie długości geograficznej na pokładzie podróżującego statku. Potrzebny był do tego dokładny zegar i taki próbowano skonstruować. Galileusz zauważył, że do mierzenia czasu można by wykorzystać ruch wahadłowy, a Huygens (1601–1665) kontynuując badania Galileusza skonstruował pierwszy zegar wahadłowy. Jednak zegar ten nie był doskonały, gdyż z upływem czasu, gdy pod wpływem tarcia i oporu powietrza amplituda wahań zmniejszała się, zmniejszał się także okres, tym samym zegar zaczynał się spieszyć. Huygens wyliczył, że aby zapewnić stałość okresu, niezależnie od amplitudy (tzw. izochronizm), należałoby ze wzrostem amplitudy zmniejszać długość wahadła. W tym celu w punkcie zawieszenia wahadła zamocował szczytki ograniczające długość wahadła (rys. 15), nie wiedział jednak, jaki powinien być dokładny kształt tych szczytk.



Rys. 15

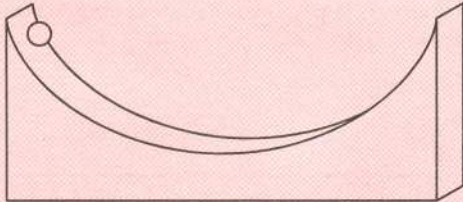
Udało mu się natomiast wyliczyć, po jakiej krzywej musi się poruszać koniec ograniczonego szczytkami izochronicznego wahadła. Tą krzywą – izochroną (Huygens zwał ją tautochroną) – okazała się cycloida. Pozostał jeszcze problem wyznaczenia kształtu szczytek. Do jego rozwiązania wykorzystał Huygens wynalezioną przez siebie wcześniej teorię ewolwent. Ewolwentą krzywej jest, potocznie rzecz ujmując, trajektoria końca

nitki odwijanej z tej krzywej (rys. 16). Okazało się, że jedną z ewolwent cykloidy jest identyczna cykloida, więc szczęki muszą również mieć kształt cykloidy. Ten fakt wskazał na inny sposób wyliczenia długości cykloidy, mianowicie długość połowy gałęzi cykloidy jest równa jej podwojonej wysokości, czyli $4r$ (na rys. 16: $AB = AB'$).



Rys. 16

Huygens zauważył, że izochronizm cykloidy można też interpretować nieco inaczej. Jeśli mamy wyźłobienie w kształcie tej krzywej, to niezależnie od punktu, z którego ciało zacznie się staczać, dotrze ono do najniższego punktu wyźłobienia po upływie tego samego czasu i żaden inny kształt wyźłobienia nie będzie miał tej własności.



Rys. 17

Kształt cykloidy możemy dziś odnaleźć także w różnych konstrukcjach architektonicznych. Już Galileusz proponował nadać kształt tej krzywej sklepieniom łukowym w katedrze i łukom mostu, kierując się nie tylko urokiem jej eleganckiego kształtu. Przypuszczał bowiem, co udowodnił dopiero de l'Hospital (1661–1704), że łuk cykloidy jest łukiem najbardziej wytrzymałym na obciążenie.

Kolejnym problemem postawionym przez Galileusza było następujące zadanie: Ze wszystkich możliwych krzywych łączących dwa różne punkty A i B , nie leżące na tej samej wysokości, wybrać tę, po której ciało ześlizguje się z wyższego punktu do niższego w najkrótszym czasie (rys. 18). Taką krzywą, o ile by ona istniała, nazwano brachistochroną i rozpoczęto jej poszukiwania. Nie był nią,

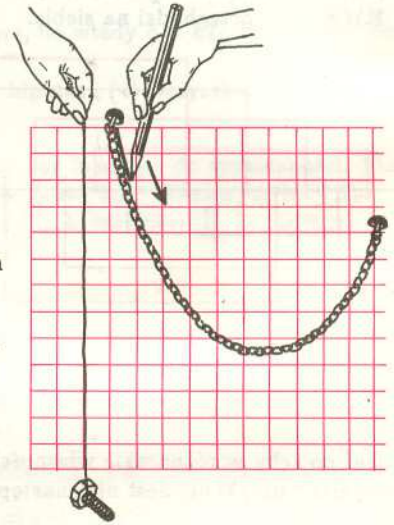
Dzisiaj proponuję Ci, Czytelniku, badanie doświadczalne nieskomplikowanego układu fizycznego, jakim jest

SWOBODNIE ZAWIESZONY ŁAŃCUCH.

Będziemy badali kształt, jaki przyjmuje łańcuch pod wpływem własnego ciężaru. W praktyce najwygodniej posłużyć się łańcuszkiem o drobnych ogniach, nie za krótkim. Chodzi o to, aby o kształcie decydował tylko jego ciężar, a nie np. sztywność lub rozciągliwość. Dlatego nie jest dobra, na przykład, żyłka nylonowa, chyba że cienka i obciążona nanizanymi na nią koralikami.

Praca eksperymentalna

Wykonamy serię doświadczeń polegających na odrysowaniu kształtu zwisającego łańcucha najlepiej na kartce papieru milimetrowego lub – w razie jego braku – kratkowanego. Ważne jest przy tym, aby papier umieścić tak, żeby linie tworzące kratki biegingo pionowo i poziomo. Posłużymy się do tego pionem, czyli dowolnym drobnym przedmiotem zawieszonym na nitce. Na pionowej płaszczyźnie (ścianie) znajdujemy dwa punkty zaczepienia i zawieszamy na nich łańcuch, a następnie (pomagając sobie pionem) umieszczamy pod nim papier milimetrowy i odrysowujemy na nim kształt łańcucha (patrz rysunek).



Doświadczenie powtarzamy wielokrotnie dla różnych położań punktów zamocowania i różnych długości łańcucha. Na papierze zaznaczamy osie współrzędnych (x – poziomo, y – pionowo) i odczytujemy punkty składające się na krzywą łańcuchową (bo tak nazywa się ta krzywa) w dogodnych odstępach – na przykład co 1 cm. Wygodnie jest wybrać początek układu współrzędnych w minimum krzywej. Mamy więc dwie formy zapisu krzywej łańcuchowej: graficzną i liczbową. Teraz przystępujemy do części interpretacyjnej naszej pracy. Będzie to

badanie właściwości krzywej łańcuchowej.

Proponuję Ci, Czytelniku, znalezienie odpowiedzi na następujące pytania:

1. Czy krzywa łańcuchowa jest symetryczna (względem prostej pionowej przechodzącej przez minimum)? Łatwo to sprawdzić składając papier z rysunkiem wzdłuż pionowej linii przechodzącej przez minimum.
2. Czy różne krzywe łańcuchowe są przystające?
3. Czy różne krzywe łańcuchowe są podobne?
4. Czy można wszystkie krzywe łańcuchowe nałożyć na siebie przez zmiany skal na osiach x i y , a jeżeli tak, to jakie?

Wskazówka: odpowiedź na pytania 3 i 4 może ułatwić przedstawienie wykresu krzywej łańcuchowej w skali podwójnie logarytmicznej ($\log y$ jako funkcja $\log x$). Życzę pomyślnych badań i ustalenia odpowiedzi na powyższe, a także i inne pytania.

Redaguje Jan GAJ

Listy prosimy przysyłać pod adresem:
 Korespondencyjny Klub Fizyków, Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego,
 ul. Hoża 69, 00-681 Warszawa.

Drobiazgi

W listopadzie 1980 r. amerykańska sonda kosmiczna Voyager 1 przeleciała w pobliżu Saturna. Wykonana po blisko dziesięciu latach analiza sygnałów radiowych wysłanych przez Voyagera pozwoliła uzyskać kolejne potwierdzenie przewidywań ogólnej teorii względności. Sonda wyposażona była w specjalny nadajnik o częstotliwości około $2,3 \cdot 10^9$ Hz, mogącej zmieniać się zaledwie o 5 części na 10^{12} . Natomiast zmierzona częstotliwość sygnałów odbieranych na Ziemi zmniejszała się w miarę jak Voyager 1 zbliżał się do Saturna, osiągnęła minimum 12 listopada 1980 r. – w dniu największego zbliżenia, po czym znów zaczęła wzrastać. Efekt był niezwykle mały – częstotliwość spadała zaledwie o kilka hertzów. Ale dokładnie tyle przewiduje ogólna teoria względności, w myśl której fale radiowe tracą nieco swojej energii na wydobycie się z silnego pola grawitacyjnego i w rezultacie ich częstotliwość ulega zmniejszeniu. Zjawisko to nosi nazwę grawitacyjnego przesunięcia ku czerwieni.

Niektóre sposoby oszczędzania energii mogą być niesłychanie proste. Gdyby w samych tylko Stanach Zjednoczonych wszyscy kierowcy napompowali opony swoich samochodów do największego dopuszczalnego ciśnienia, to codzienne zużycie paliwa spadłoby o około 100 000 baryłek (tj. $\sim 1,5 \times 10^7$ l) ropy!

Wiek XVII to data narodzin konkurencyjnej (przynajmniej wówczas) do uniwersytetów organizacji uczonych – Akademii Nauk. Rzecz ciekawa, że właściwie tylko w Anglii nową organizację współtworzyli profesorowie uniwersytetów – na kontynencie byli to prawie wyłącznie ludzie „z zewnątrz”, często oficerowie. Ale nawet w Anglii Barrow, Wallis, Boyle, Hooke, Halley, Newton zaczątek późniejszego *Royal Society* organizowali tajnie – było to tzw. Niewidzialne Kolegium.

Suwając po dwóch prostych skośnych trzecią prostą w ten sposób, by była równoległa stale do tej samej płaszczyzny otrzymamy siodło takie, jak do jazdy konnej. Jeśli masz siodło pod ręką, sprawdź, że w każdym miejscu można tak na nim położyć patyczek, by cały go dotykał.

Na kartce papieru rozmieść dowolnie pewną liczbę odcinków, dbając jedynie o to, by stykały się one tylko końcami. Twój obrazek składa się z kilku spójnych kawałków, z których każdy wycina z płaszczyzny pewną liczbę obszarów. Oznaczamy:

K = liczba narysowanych odcinków, $K = 13, W = 15, O = 2, S = 2$

W = liczba węzłów (punkty styku i wolne końce odcinków)

O = liczba wyciętych obszarów,

S = liczba części obrazka.

Niezależnie od tego, co narysowałeś, zawsze otrzymasz $W + O = K + S$.

Dlaczego? Odpowiedź nie jest trudna. Powyższa obserwacja prowadzi do odkrycia nowych, głębokich własności geometrycznych.



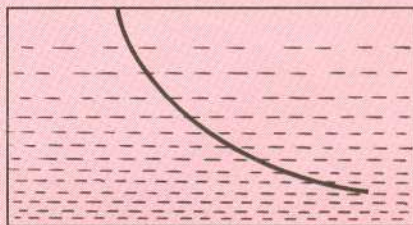
jak się okazało, ani odcinek prostej, ani dużo „lepszy” od niego łuk okręgu.



Rys. 18

Tylko paru matematykom udało się znaleźć brachistochronę. Pierwszym z nich był Jan Bernoulli (1667–1748). Rozwiązanie zaskoczyło wszystkich: jedyną krzywą będącą brachistochroną okazała się znów cycloida.

Jan Bernoulli do rozwiązania problemu wykorzystał własności promienia świetlnego przechodzącego od jednego punktu do drugiego przez ośrodek o zmieniającej się gęstości. Promień ten, oczywiście, wybiera taką drogę, której przebycie zajmie mu najmniej czasu. Dlatego brachistochronę można też interpretować jako drogę promienia świetlnego w ośrodku o gęstości zwiększającej się w sposób regularny.



Rys. 19

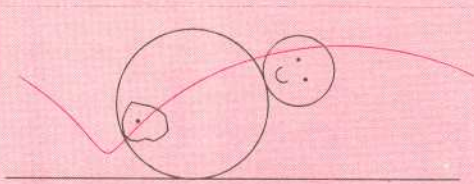
Po odkryciu tych wszystkich własności, w XVII i XVIII wieku cycloida stała się tak popularna, że wzmianki o niej zaczęły się pojawiać nawet w literaturze pięknej (m.in. *Podróże Guliwera* Jonathana Swifta, *Życie i myśli JW Pana Tristrama Shandy* Laurence'a Sterne'a).

Tymczasem dalsze badania wciąż ujawniały kolejne różnorodne własności cycloidy i ich zastosowania. Do dziś cycloida i jej odmiany spotykane są często w rozmaitych zagadnieniach matematyki, fizyki i techniki. Cycloida skrócona jest, na przykład, kształtem przekroju fali w dostatecznie głębokim zbiorniku cieczy.



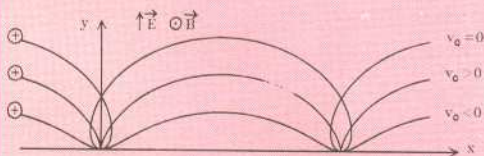
Rys. 20

Jest też torem ruchu środka ciężkości ciężarka powodującego ruch periodyczny urządzeń działających tak, jak „Wańka-Wstańka”.



Rys. 21

Wszystkie trzy odmiany cykloidy są torami ruchu cząstki naładowanej dodatnio w skrzyżowanym polu elektrycznym i magnetycznym. Odmiana cykloidy zależy tam od prędkości początkowej cząstki (rys. 22). Kształt cykloidy nadawany jest też często zębom listw zębatych używanych w przekładniach w celu zminimalizowania tarcia (zębom kół zębatych nadawane są kształty epi- i hipocykloid).



Rys. 22

Ponieważ odmiany cykloidy definiuje się jako trajektorie punktu leżącego wewnątrz, na zewnątrz lub na brzegu koła, wobec tego punkty kreślące każdą z trzech odmian cykloidy możemy odnaleźć na kole poruszającym się po szynie.

Wszystkie trzy odmiany cykloidy możemy też dostać jako trajektorie punktu leżącego na brzegu koła. Jeśli koło toczy się po prostej bez poślizgu, dostajemy cykloidę zwyczajną. Jeżeli natomiast z poślizgiem zgodnym z kierunkiem ruchu, dostajemy cykloidę skróconą, a jeśli z poślizgiem przeciwnym do kierunku ruchu – wydłużoną. Poślizg ten rozumiemy jako różnicę między prędkością ruchu postępowego i prędkością ruchu obrotowego toczącego się koła. Dlatego zamiast rozważać ruch punktu leżącego na toczącym się kole można rozważać ruch złożony z ruchu postępowego środka koła z prędkością v_1 i ruchu obrotowego koła wokół jego środka z prędkością v_2 . Taka właśnie interpretacja była stosowana w epicykloidalnych modelach systemu planetarnego.

Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Szczegółowy regulamin Klubu 44 zamieściliśmy w *Delcie* 7/1990, a jego skrót – we wszystkich numerach, w których są zadania ligowe (to jest, tradycyjnie, z wyjątkiem numerów 6 i 7).



Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 211 (WT=3,28) i 212 (WT=2,71)
z numeru 10/1990

Mariusz Zajac	Pruszków 42,95
Tomasz Grzesiak	Kraków 41,48
Przemysław Gadziński	Sroda Śl. 40,05
Paweł Kubit	Krosno 39,68

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 3/1991

Przypominamy treść zadań:

217. Wyznaczyć maksimum wyrażenia

$$w^2(w^2 + 1)^{-2} + x^2(x^2 + 1)^{-2} + y^2(y^2 + 1)^{-2} + z^2(z^2 + 1)^{-2}$$

po wszystkich czwórkach liczb dodatnich takich, że $w + x + y + z = 2$.

218. Niech $p > 2$ będzie liczbą pierwszą. Dowieść, że jeśli n jest liczbą naturalną, a $x = \sqrt{n}$ nie jest liczbą naturalną, to różnica $[(x + [x])^p] - 2[x]$ dzieli się przez $2p$.

217. Badając znak pierwszej i drugiej pochodnej funkcji

$f(t) = (t^2 + 1)^{-2}t^2$ w przedziale $(0; 2)$ stwierdzamy, że

(1) f rośnie w $(0; 1)$, maleje w $(1; 2)$;

(2) f ma dwa punkty przegięcia $t_1 \in (\frac{1}{6}; \frac{1}{2})$, $t_2 \in (1; 2)$,

jest wypukła w $(0; t_1)$ i $(t_2; 2)$, wklęsła w $(t_1; t_2)$.

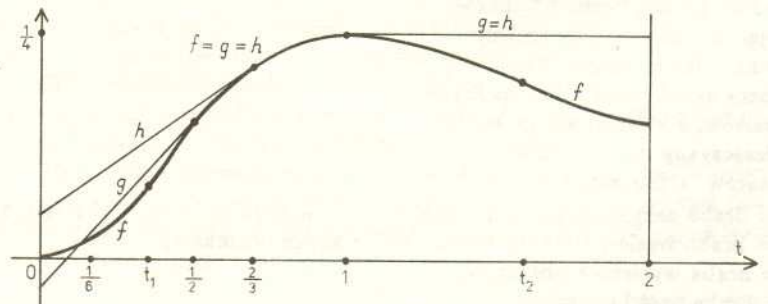
Weźmy pod uwagę funkcje wklęsłe g i h , określone na przedziale $(0; 2)$ wzorami

$$g(t) = \begin{cases} f(\frac{1}{2}) + f'(\frac{1}{2})(t - \frac{1}{2}) = \frac{4}{125}(12t - 1) & \text{dla } t \in (0; \frac{1}{2}), \\ f(t) & \text{dla } t \in (\frac{1}{2}; 1), \\ \frac{1}{4} & \text{dla } t \in (1; 2), \end{cases}$$

$$h(t) = \begin{cases} f(\frac{2}{3}) + f'(\frac{2}{3})(t - \frac{2}{3}) = \frac{108}{2107}(5t + 1) & \text{dla } t \in (0; \frac{2}{3}), \\ f(t) & \text{dla } t \in (\frac{2}{3}; 1), \\ \frac{1}{4} & \text{dla } t \in (1; 2). \end{cases}$$

(Wykres każdej z nich jest sumą kawałka wykresu funkcji f oraz dwóch odcinków stycznych.) Oczywiście, $g \leq h$. Ponieważ $g(\frac{1}{6}) > f(\frac{1}{6})$, zatem na mocy (2)

(3) $f(t) \leq g(t) \leq h(t)$ dla $t \in (\frac{1}{6}; 2)$.



Oznaczmy badaną sumę $f(w) + f(x) + f(y) + f(z)$ przez $F(w, x, y, z)$. Możemy przyjąć, że $w \leq x \leq y \leq z$. Rozważmy trzy przypadki:

1. $w \geq \frac{1}{6}$. Z nierówności (3) i z wklęsłości funkcji g mamy:

$$F(w, x, y, z) \leq g(w) + g(x) + g(y) + g(z) \leq 4g\left(\frac{w+x+y+z}{4}\right) = 4g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{16}{25}$$

(równość zachodzi, gdy $w = x = y = z = \frac{1}{2}$).

2. $w < \frac{1}{6} \leq x$; wówczas $f(w) < w^2 < \frac{1}{6}w$. Z nierówności (3) i z wklęsłości funkcji h otrzymujemy

$$F(w, x, y, z) < \frac{1}{6}w + h(x) + h(y) + h(z) \leq \frac{1}{6}w + 3h\left(\frac{x+y+z}{3}\right) = \frac{1}{6}w + 3h\left(\frac{2-w}{3}\right) = \frac{108}{169} + \left(\frac{1}{6} - \frac{540}{2197}\right)w < \frac{108}{169} < \frac{16}{25}$$

3. $w \leq x < \frac{1}{6}$. Wtedy, zgodnie z (1),

$$F(w, x, y, z) < 2f(1) + 2f\left(\frac{1}{6}\right) < \frac{16}{25}$$

Konkluzja: F osiąga maksimum równe $\frac{16}{25}$ przy $w = x = y = z = \frac{1}{2}$.

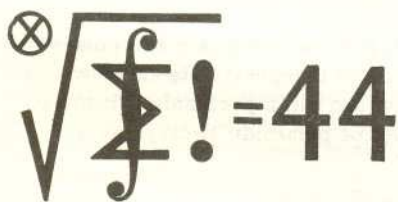
218. Oznaczając: $s = ([x] + x)^p$, $r = ([x] - x)^p$ mamy

$$\frac{s+r}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} ([x]^{p-k} x^k + [x]^{p-k} (-x)^k) = \sum_{j=0}^{\lfloor p/2 \rfloor} \binom{p}{2j} [x]^{p-2j} x^{2j}$$

W otrzymanej sumie wszystkie składniki są liczbami całkowitymi. Zatem $(s+r)/2$ jest liczbą całkowitą. Współczynniki $\binom{p}{2j}$ dla $1 \leq j < p/2$ są podzielne przez p . Stąd i z twierdzenia Fermata:

$$\frac{s+r}{2} \equiv [x]^p \equiv [x] \pmod{p},$$

więc $s+r \equiv 2[x] \pmod{2p}$; a ponieważ $-1 < r < 0$, zatem $[s] \equiv 2[x] \pmod{2p}$. Jest to teza zadania.



Redaguje Jerzy BROJAN

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 3/1991

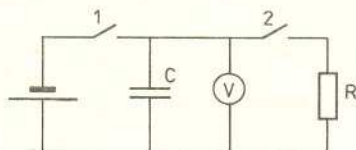
Przypominamy treść zadań:

115. Opisać metodę pomiaru prędkości pocisku karabinowego z wykorzystaniem woltomierza, kondensatora, baterijki, opornika, pasków folii aluminiowej i taśmy mierniczej lub długiej linijki. Należy przedstawić schemat obwodu i podać wzór, z którego można obliczyć prędkość pocisku. Jeśli woltomierz ma opór 100 k Ω , to jak należy wybrać wartości oporu opornika i pojemności kondensatora, aby pomiar był najłatwiejszy i najdokładniejszy?

116. Spośród różnych stanów polaryzacji fali elektromagnetycznej wyróżniamy polaryzację liniową (gdy pole elektryczne drga wzdłuż określonej osi prostopadłej do kierunku fali) i polaryzację kołową (gdy pole elektryczne obraca się w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku fali, nie zmieniając wartości).

Wykazać, że można wytworzyć falę spolaryzowaną kołowo przepuszczając falę spolaryzowaną liniowo przez obracający się polaroid i rozkładając otrzymaną falę na składowe harmoniczne. Obliczyć amplitudy i częstotliwości tych składowych, jeśli dana jest amplituda A i częstotliwość ω fali padającej, oraz prędkość kątowna polaroidu Ω .

115. Należy na drodze pocisku umieścić kolejno dwa paski folii oznaczone na podanym obok schemacie jako klucze 1 i 2. Gdy klucze są zamknięte (tzn. paski nienaruszone), kondensator jest naładowany do napięcia baterii U_0 .



Równania krzywych cykloidalnych

Łatwo znaleźć równania cykloid w postaci parametrycznej, które są najwygodniejsze do badania własności tych krzywych. Jeśli przyjąć, że koło toczy się po osi OX bez poślizgu, a najniższe położenie punktu kreślącego osiągnięte jest w chwili, gdy koło przechodzi przez punkt O , to równania te mają postać:

$$x = rt - d \sin t,$$

$$y = r - d \cos t,$$

gdzie r oznacza promień koła generującego, d – odległość punktu kreślącego od środka koła, t – kąt, o jaki obróciło się koło od położenia początkowego.

Podobne równania parametryczne można wyprowadzić dla epicykloid i hipocykloid. Jeżeli umówić się, że dla epicykloid długość promienia r koła generującego ma znak dodatni, a dla hipocykloid ujemny, można równania obu rodzin zapisać razem w postaci:

$$x = (R+r) \cos \frac{r}{R}t - r \cos\left(t + \frac{r}{R}t\right),$$

$$y = (R+r) \sin \frac{r}{R}t - r \sin\left(t + \frac{r}{R}t\right),$$

gdzie R oznacza długość promienia koła stałego, a pozostałe oznaczenia są takie jak dla cykloid.

Dzięki temu, że wielu najwybitniejszych matematyków trudziło się badaniem poszczególnych własności cykloidy, zostały odkryte metody, które dzisiaj pozwalają bez większego wysiłku badać zarówno cykloide, jak i krzywe bardziej skomplikowane, o ile tylko dysponujemy ich równaniami. Ponieważ cykloida jest granicą ciągu epicykloid i hipocykloid przy promieniu koła stałego dążącym do nieskończoności, więc własności tych krzywych są uogólnieniem własności cykloidy. Dla przykładu: Pole obszaru ograniczonego gałęzią epicykloidy (hipocykloidy) i kołem stałym wynosi $\pi r^2 \left(3 + 2 \frac{r}{R}\right)$.

Normalna i styczna do epicykloidy (hipocykloidy) przechodzi odpowiednio przez punkt styczności koła generującego z kołem stałym i przez przeciwległy temu punktowi koniec średnicy koła generującego.

Długość gałęzi epicykloidy (hipocykloidy) wynosi $8r \left(1 + \frac{r}{R}\right)$.

Ewoluta epicykloidy (hipocykloidy) jest epicykloidą (hipocykloidą) podobną, ze współczynnikiem podobieństwa $\frac{1}{1 + 2 \frac{r}{R}}$.

Program komputerowy do kreślenia cykloid

Mając równania parametryczne krzywych cykloidalnych łatwo napisać program dla komputera, który będzie rysował wykresy tych krzywych. Szkic takiego programu w języku Basic może wyglądać następująco:

```

10 INPUT r1'r2'd'k'
20 CIRCLE 128,87,r1
25 CIRCLE r1+r2+128,87,r2
30 LET m=r2/r1: LET t=0
40 LET a=(1+m)*r1: LET b=m*t
45 LET c=b+t
50 LET x=a*COsb-d+COSc+128
60 LET y=a*SINb-d+SINc+87
70 PLOT x,y: LET t=t+k
80 GOTO 40
    
```

Parametr k reguluje szybkość kreślenia, a jednocześnie zagęszczenie punktów składających się na wykres (można przyjąć np. $k = 0,05$), $r1$ jest długością promienia koła stałego, a $r2$ koła generującego (dla hipocykloid $r2 < 0$), d jest odległością punktu kreślącego od środka koła generującego. Program można zatrzymać w dowolnej chwili instrukcją BREAK SPACE. Za pomocą instrukcji BREAK SPACE i GOTO można uzyskać kilka wykresów na jednym ekranie.

O krzywych cykloidalnych można by jeszcze pisać bardzo dużo. Zainteresowanych odsyłamy do następujących pozycji:

Historia matematyki, 3 tomy pod redakcją A.P. Juszkiewicza, PWN, Warszawa 1976.

Poradnik matematyczny, pod redakcją I. Dziubińskiego, T. Świątkowskiego, PWN, Warszawa 1982.

Matematyka. Poradnik inżyniera, 2 tomy, WNT, Warszawa 1986.

R. Courant, H. Robbins, *Co to jest matematyka*, PWN, Warszawa 1962.

H. M. Cundy, A. P. Rollet, *Modele matematyczne*, PWN, Warszawa 1967.

A. R. Hall, *Rewolucja naukowa 1500-1800*, PAX, Warszawa 1966.

R. Hooke, D. Shaffer, *Modele matematyczne a rzeczywistość*, PWN, Warszawa 1966.

M. Kline, *Matematyka a świat fizyczny*, PWN, Warszawa 1964.

E. Niczyporowicz, *Krzywe płaskie. Wybrane zagadnienia z geometrii analitycznej i różniczkowej*, PWN, Warszawa 1991.

Mierzmy wielkość U_0 , a nie siłę elektromotoryczną baterii, tak że ewentualny spadek napięcia na oporze wewnętrznym baterii nie ma znaczenia dla dalszych rozważań. Otwarcie klucza 1 (przerwanie paska) oznacza, że kondensator zaczyna się rozładowywać przez opornik i napięcie na nim spada; otwarcie klucza 2 zatrzymuje rozładowanie kondensatora, tak że napięcie jest dalej stałe (o ile pominiemy wpływ ładunku przez woltomierz). Oznaczmy tę końcową wartość napięcia jako U . Jak wiadomo, rozładowanie kondensatora przez opornik przebiega według wzoru

$$U = U_0 e^{-t/RC},$$

skąd

$$t = RC \ln \frac{U_0}{U}.$$

Mając czas t oraz odległość między paskami l możemy bez trudu obliczyć prędkość pocisku

$$v = \frac{l}{t} = \frac{l}{RC \ln(U_0/U)}.$$

Aby właściwie wybrać wartości R i C , założmy, że prędkość v jest rzędu 1000 m/s, a $l \approx 1$ m, czyli $t \approx 1$ ms. Nietrudno dojść do wniosku, że pomiar czasu będzie dokładny tylko wtedy, gdy iloczyn RC nie jest ani znacznie większy od t (wtedy bowiem kondensator prawie wcale nie rozładowałby się w ciągu tego czasu), ani znacznie mniejszy od t (wtedy rozładowałby się praktycznie do zera; w obu przypadkach obliczona wartość $\ln(U_0/U)$ mogłaby być obciążona dużym błędem). Przyjmijmy więc, że $RC \approx 1$ ms. Ponadto trzeba założyć, że w ciągu czasu potrzebnego na odczytanie napięcia U (około 1 s) spadek napięcia wynikający z rozładowania kondensatora przez woltomierz jest pomijalnie mały, czyli

$$R_{wolt} C \gg 1 \text{ s}.$$

Tak więc dla $R_{wolt} = 100 \text{ k}\Omega$ możemy wziąć C równe $10^{-4} \div 10^{-3} \text{ F}$, tzn. $100 \div 1000 \mu\text{F}$ i odpowiednio do tego $R \approx 1 \div 10 \Omega$.

116. Przyjmijmy, że kierunek biegu fali pokrywa się z osią z , a pole elektryczne leży w płaszczyźnie xy . Polaroid przepuszcza tę składową fali, której pole elektryczne ma kierunek jego osi, a pochłania składową o prostopadłym kierunku pola. Jeśli więc oś polaroidu tworzy kąt α z osią x , to rzut pola na nią wynosi

$$E' = E_x \cos \alpha + E_y \sin \alpha,$$

a rozkładając E' na składowe mamy pole fali przepuszczonej

$$E'_x = E_x \cos^2 \alpha + E_y \cos \alpha \sin \alpha,$$

$$E'_y = E_x \cos \alpha \sin \alpha + E_y \sin^2 \alpha.$$

Podstawiając $E_x = A \cos \omega t$, $E_y = 0$, $\alpha = \Omega t$ otrzymujemy

$$E'_x = \frac{A}{2} \cos \omega t + \frac{A}{4} (\cos(\omega + 2\Omega)t + \cos(\omega - 2\Omega)t),$$

$$E'_y = \frac{A}{4} (\sin(\omega + 2\Omega)t - \sin(\omega - 2\Omega)t).$$

Fala przepuszczona zawiera zatem: 1) składową wejściową o amplitudzie $\frac{A}{2}$, 2) składową obracającą się zgodnie z polaroidem o amplitudzie $\frac{A}{4}$ i częstości $\omega + 2\Omega$, 3) składową obracającą się przeciwnie do polaroidu o amplitudzie $\frac{A}{4}$ i częstości $\omega - 2\Omega$.

