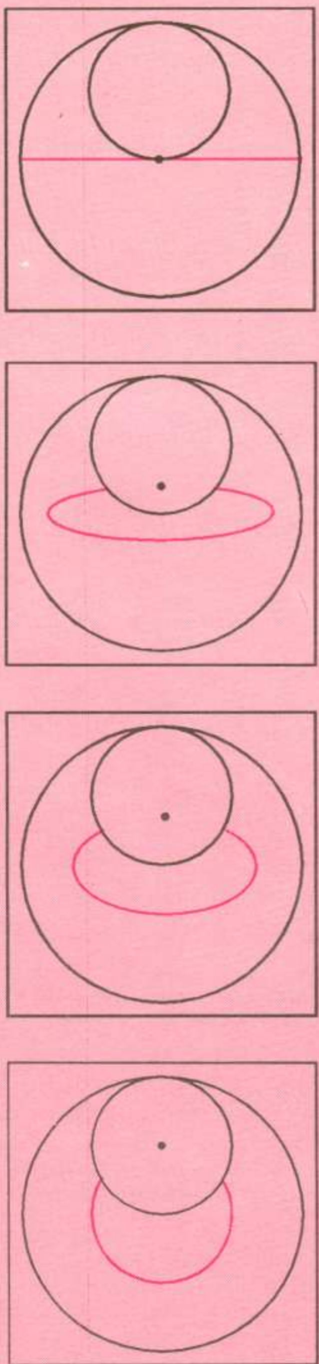
W zależności od tego, w którym otworku umieścimy koniec ołówka, dostaniemy dowolną elipsę „szeroką" lub „wąską", a w granicznych przypadkach okrąg i odcinek.



Rys. 10

Cykloida

Od XVI w. zaczęło się bardziej intensywne badanie krzywych cykloidalnych. W XVII w. uwaga matematyków skupiła się przede wszystkim na samej cykloidzie. Z powodu pięknych własności zarówno geometrycznych, jak i technicznych okazała się ona wdzięcznym przedmiotem badań i szybko zyskała sobie dużą popularność.

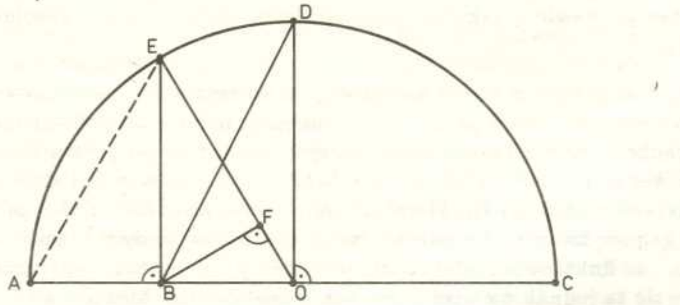
Geometryczny dowód pewnej nierówności

Pomiędzy średnimi: harmoniczną, geometryczną, arytmetyczną i kwadratową dwóch dodatnich liczb rzeczywistych x, y zachodzi następująca zależność:

$$\min(x,y) \le \sqrt{x\cdot y} \le \frac{x+y}{2} \le \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \le \max(x,y).$$

Czy można wskazać geometryczną interpretację (geometryczny dowód) tej nierówności?

Niech $|AB| = x$, $|BC| = y$, $(x < y)$, $|AC| = x + y$. Na odcinku AC, jako na średnicy, rysujemy półokrąg i zaznaczamy odcinki $OD \perp AC$, $BE \perp AC$ (rysunek).



Oczywiście, $|OD| = \frac{x+y}{2}$, $|BE| = \sqrt{x\cdot y}$, $|OB| = \frac{y-x}{2}$. Ponadto

$$|BD| = \sqrt{OD^2 + OB^2} = \sqrt{\frac{1}{4}(x+y)^2 + \frac{1}{4}(y-x)^2} = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

Rysujemy teraz odcinek $BF \perp OE$. Ponieważ

$$|BE|^2 = |EO|^2 - |OB|^2 \quad \text{i} \quad \frac{|BO|}{|FO|} = \frac{|EO|}{|BO|},$$

więc $|BE|^2 = |EF|\cdot|EO|$. Stąd

$$|EF| = \frac{|BE|^2}{|EO|} = \frac{x\cdot y}{\frac{x+y}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}.$$

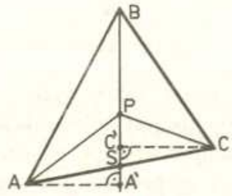
W równoramiennym trójkącie AOE, $BF \not\parallel AE$, więc $|AB| < |EF|$. Z rysunku widać, że

$$|AB| \le |EF| \le |EB| \le |DO| \le |DB| \le |BC|$$

(równości mają miejsce tylko w przypadku, gdy $x = y$).

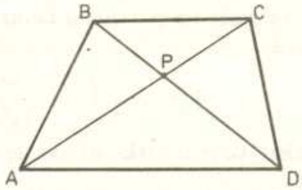
Jarosław GÓRNICKI

Rozwiązanie zadania M 604.
Oznaczmy rzut prostokątny punktu A na prostą BP przez A', a punktu C – przez C'. Niech S będzie punktem przecięcia prostej BP z bokiem AC. Ponieważ pola $\triangle PBA$ i $\triangle PBC$ są równe, więc wysokości opuszczone na wspólny bok BP w tych trójkątach też będą równe.



Zatem $AA' = CC'$ i wobec tego trójkąty prostokątne $AA'S$ i $BB'S$ są przystające (mają jeszcze równe kąty przy wierzchołku S). Stąd $AS = SC$, a więc BP jest środkową. Podobnie stwierdzamy, że środkowymi są AP i CP.

Rozwiązanie zadania M 605.
Trójkąty ABP i CDP mają jednakowy kąt przy wierzchołku P – oznaczmy go α.



Ponieważ ich pola są równe, więc

$$\frac{1}{2}\cdot AP\cdot BP\cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}\cdot CP\cdot DP\cdot \sin\alpha.$$

Stąd

$$\frac{AP}{DP} = \frac{CP}{BP}$$

i trójkąty APD i CPB są podobne (bo mają też jednakowy kąt przy wierzchołku P). W szczególności $\angle PAD = \angle PCB$, co dowodzi równoległości AD i BC.