Przedstawiamy artykuł, w którym Autor pisze o problemach stanowiących ważny kierunek badawczy współczesnej matematyki. Podaje też twierdzenie, w którego dowodzie wykorzystany jest fragment jego niedawnej publikacji (z 1990 roku). Okazuje się, że i o aktualnych badaniach naukowych można pisać zrozumiale.

Redakcja

Inwolucje i symetrie

O PRZEKSZTAŁCENIACH, KTÓRE SĄ SWOIMI WŁASNYMI ODWROTNOŚCIAMI. PEWIEN NIE ROZWIĄZANY PROBLEM.

Jerzy JURKIEWICZ

Układ dwóch wielomianów dwóch zmiennych

$$(f(x,y), g(x,y))$$

określa przekształcenie płaszczyzny $\mathbf{R}^2$ w nią samą. Nazwiemy to przekształcenie inwolucją, jeżeli jest swoją własną odwrotnością, inaczej mówiąc

$$f(f(x,y), g(x,y)) = x \quad \text{oraz} \quad g(f(x,y), g(x,y)) = y\,.$$

Łatwo uogólnić pojęcie inwolucji tak, aby odnosiło się do przestrzeni trójwymiarowej.

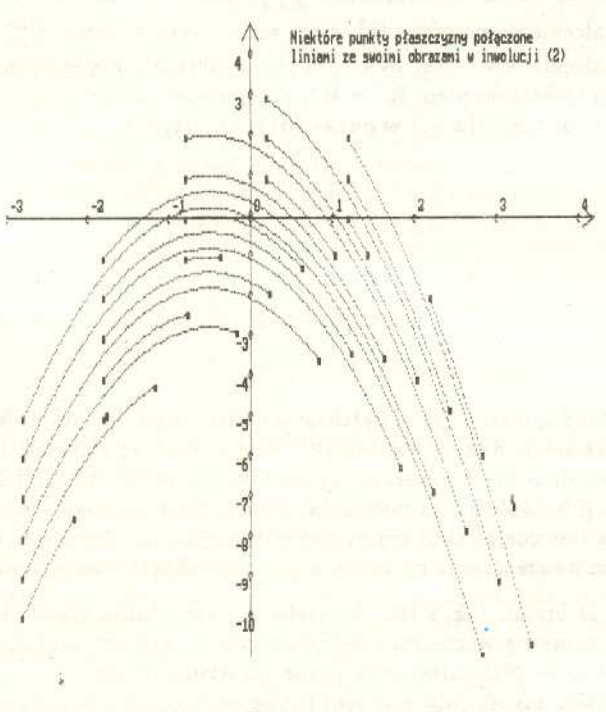
Przykładem inwolucji jest układ

$$f(x,y) = y, \quad g(x,y) = x\,, \tag{1}$$

czyli symetria względem prostej $x = y$ i w ogóle każda symetria płaszczyzny. Ale nie są to jedyne inwolucje. Można, na przykład, łatwo sprawdzić, że układ wielomianów

$$(y + x^2, x - (y + x^2)^2) \tag{2}$$

też jest inwolucją, chociaż nie jest symetrią.



Ale może jest to symetria przedstawiona w jakimś innym układzie współrzędnych? Wyjaśnimy to pojęcie. Powiemy, że wielomiany

$$\begin{matrix} \alpha(x,y) \\ \beta(x,y) \end{matrix} \tag{3}$$

tworzą (algebraiczny, krzywoliniowy) układ współrzędnych na płaszczyźnie $\mathbf{R}^2$, jeżeli istnieją takie wielomiany $\gamma(x,y)$ i $\delta(x,y)$, że

$$\alpha(\gamma(x,y), \delta(x,y)) = x, \quad \beta(\gamma(x,y), \delta(x,y)) = y\,,$$
$$\gamma(\alpha(x,y), \beta(x,y)) = x, \quad \delta(\alpha(x,y), \beta(x,y)) = y\,.$$

O pewnym młodym matematyku

Nasz artykuł dotyczy pewnego wydarzenia z życia profesora Marka Kaca.

Marek (Mark) Kac urodził się w Krzemieńcu 16 sierpnia 1914 roku w rodzinie żydowskiej. Jego ojciec uzyskał doktorat z filozofii na Uniwersytecie Lipskim, a później ukończył jeszcze studia na Uniwersytecie Moskiewskim. Marek Kac rozpoczął naukę w domu, potem uczył się w szkole żydowskiej, by w 1925 roku wstąpić do Liceum Krzemienieckiego. Tam właśnie, przed maturą, napisał pracę stanowiącą temat naszego artykułu.

W latach 1931–35 studiował matematykę na Uniwersytecie Lwowskim. Już podczas studiów zaczął współpracować naukowo z Hugonem Steinhausem. Współpraca ta (dotycząca funkcji stochastycznych i ich zastosowań) trwała do 1938 roku (gdy Kac wyjechał na stypendium do USA) i (zdaniem samego Kaca) była decydująca dla jego dalszej kariery naukowej.

W USA młody doktor Kac kontynuował rozpoczęte w Polsce badania współpracując z wieloma wybitnymi matematykami (np. z van Kampenem, Erdösem, Wienerem). W 1939 roku został zatrudniony w Cornell University, gdzie przepracował 22 lata uzyskując liczące się w świecie wyniki na styku matematyki i różnych dyscyplin przyrodniczych (głównie fizyki) oraz technicznych. Później kierował wielu innymi placówkami naukowymi. Zmarł 26 października 1984 roku.

Delta miała szczęście zetknąć się z Markiem Kacem w 1979 roku, gdy bawił w Polsce z okazji przyznania mu przez Polskie Towarzystwo Fizyczne medalu imienia Smoluchowskiego. Wręczyliśmy mu wtedy kilka numerów naszego pisma. Szczęśliwym trafem było to przed jego bezsenną nocą – kiedy następnego dnia poprosiliśmy go o rozmowę, „był na bieżąco”. *Delta* podobała mu się. W śpiewnej kresowej polszczyźnie oświadczył, że sam też chciałby w Stanach wydawać takie pismo, ale *tam nie znajdzie się takiego wariata, który dałby na to pieniądze.*

Kac w istocie mógłby wydawać takie pismo. Był bardzo interesującym popularyzatorem. Z jego prac na ten temat najbardziej znany jest esej *Czy można usłyszeć kształt bębna?*

We wspomnieniach *Enigmas of chance* Marek Kac opisuje wydarzenie, które spowodowało, że został matematykiem. Kiedy był uczniem szkoły średniej, program matematyki nie przewidywał rozwiązywania równań stopni wyższych niż dwa. Kac zainteresowany problemem zajrzał do podręcznika i w rozdziale dotyczącym równań stopnia trzeciego natrafił na rozwiązanie nie zawierające jednak ani słowa na temat, w jaki sposób się do niego dochodzi. Potraktował to jako wyzwanie i postanowił sam dotrzeć do wyprowadzenia wzorów.

Na rozwiązanie problemu poświęcił wakacje. Pracował ciężko i z wielkim napięciem, by uzyskać w końcu upragnione formuły. Tak pisze o tym we wspomnieniach:

> „W życiu wiele razy silnie angażowałem się emocjonalnie w rozwiązywanie problemów naukowych. Nigdy jednak nie pracowałem tak zapamiętale i gorączkowo, jak latem 1930 roku. Wstawałem wcześnie rano i prawie nie tracąc czasu na posiłki spędzałem całe dnie na zapisywaniu ryz papieru wzorami matematycznymi. Zaniedbałem zupełnie życie towarzyskie – przestałem widywać się z przyjaciółmi, nawet nie umawiałem się na randki. Zresztą i tak jakakolwiek rozmowa ze mną była pozbawiona sensu, bowiem odpowiadałem wyłącznie monosylabami.
>
> Pozbawiony strategii, zapalałem się do przypadkowych pomysłów, które często okazywały się daremnymi wysiłkami, prowadzącymi w ślepe uliczki."

Na początku roku szkolnego przedstawił nauczycielowi matematyki rękopis zawierający efekty pracy. Nauczyciel, po wnikliwym przeczytaniu, poradził mu wysłać manuskrypt do pisma *Młody Matematyk*. Po kilku miesiącach szkołę Kaca odwiedził wizytator Ministerstwa Wyznań Religijnych i Oświecenia Publicznego, Antoni Marian Rusiecki, będący również redaktorem naczelnym *Młodego Matematyka*. Kac dowiedział się wtedy, że redakcja postanowiła opublikować jego artykuł, ponieważ pomimo początkowego przekonania, iż jego metoda jest znana, bezowocne poszukiwania w literaturze doprowadziły do uznania jej za nową. W czasie rozmowy wizytator Rusiecki stwierdził, że Kac powinien studiować matematykę, gdyż niewątpliwie ma talent.

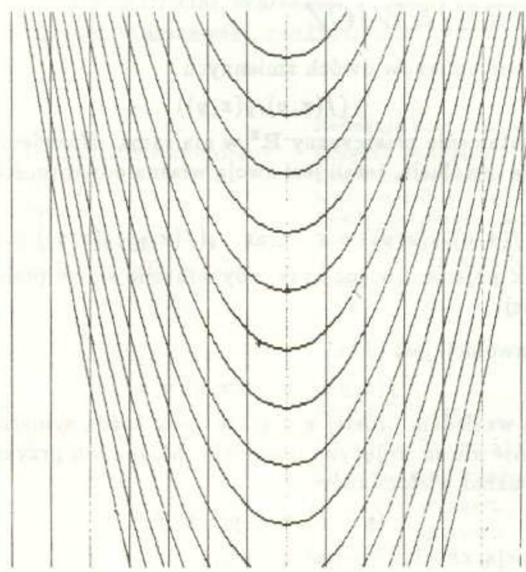
Wielomiany $\begin{smallmatrix}\gamma(x,y)\\ \delta(x,y)\end{smallmatrix}$ tworzą także układ współrzędnych, jak mówimy, „odwrotny" do układu (3).

Zadanie 1. Sprawdzić, że

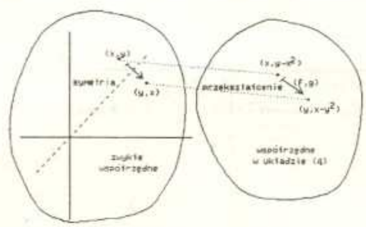
$$\begin{matrix} x \\ y - x^2 \end{matrix} \tag{4}$$

jest układem współrzędnych na płaszczyźnie.

Współrzędnymi punktu $(2,3) \in \mathbf{R}^2$ w tym układzie są 2 i $3 - 2^2 = -1$. A oto jak wygląda „siatka współrzędnych" w tym układzie, to znaczy zbiory $\{x = n\}$ i $\{y - x^2 = m\}$, gdzie n i m przebiegają liczby całkowite.



Algebraiczny układ współrzędnych $\begin{smallmatrix}\alpha(x,y)\\ \beta(x,y)\end{smallmatrix}$ można też uważać za przekształcenie płaszczyzny $\mathbf{R}^2$ w nią samą. Wtedy układ $\begin{smallmatrix}\gamma(x,y)\\ \delta(x,y)\end{smallmatrix}$ stanowi przekształcenie odwrotne. Symetria (1), w układzie współrzędnych (3), staje się przekształceniem $\mathbf{R}^2$ w $\mathbf{R}^2$, przeprowadzającym dla dowolnych x i y punkt $(\alpha(x,y), \beta(x,y))$ w punkt $(\alpha(y,x), \beta(y,x))$.



Na przykład symetria (1) w układzie współrzędnych (4) staje się przekształceniem danym wzorem (2). Widać stąd, że symetria po zmianie układu współrzędnych przestaje na ogół być symetrią. Natomiast każda symetria (i w ogóle każda inwolucja) w dowolnym układzie współrzędnych pozostaje inwolucją. Stąd mamy naturalne pytanie: Czy każda inwolucja płaszczyzny przedstawia symetrię w pewnym układzie współrzędnych?

Odpowiedź brzmi: tak, z tym że trzeba dopuścić także symetrie względem punktu i symetrię względem całej płaszczyzny, czyli przekształcenie tożsamościowe. Natomiast dotychczas nie wiadomo, czy

(5) *każda inwolucja przestrzeni trójwymiarowej przedstawia symetrię (względem punktu, prostej, płaszczyzny lub całej przestrzeni) w pewnym algebraicznym układzie współrzędnych w* $\mathbf{R}^3$.

W każdej symetrii co najmniej jeden punkt pozostaje stały. Otóż okazuje się, że tę własność mają wszystkie inwolucje, co jest pewnym argumentem na korzyść hipotezy (5).

Zadania

2. Wykaż, że każde ciągłe przekształcenie prostej, które jest swoją własną odwrotnością, ma punkt stały na tej prostej.

3. Wykaż, że każda inwolucja prostej (zadana pojedynczym wielomianem jednej zmiennej) jest symetrią (lub tożsamością).
4. Wykaż, że każda inwolucja płaszczyzny wyrażona dwoma wielomianami stopnia pierwszego przedstawia symetrię w pewnym układzie współrzędnych.

Podam teraz dowód hipotezy (5) w przypadku, gdy inwolucja zadana jest wielomianami stopni ≤ 2. Wymiar przestrzeni, którą oznaczymy przez V, nie jest istotny. Dowód jest w zasadzie elementarny, wymaga jednak pewnej wprawy w posługiwaniu się przekształceniami wielomianowymi.

Skoro wiadomo, że inwolucja ma punkt stały, to możemy przyjąć, że jest nim początek układu współrzędnych. Inwolucję można wtedy zapisać w postaci $L+D$, gdzie w skład L wchodzą wyłącznie jednomiany stopnia 1, a w skład D jednomiany stopnia 2. Oznaczmy jeszcze przez I tożsamość na V. Z określenia inwolucji mamy

$$(L+D)\circ(L+D)=I.$$

(W dalszym ciągu symbol „$\circ$" oznaczający składanie przekształceń będziemy pomijać.) Wynika stąd, że $LL+LD+D(L+D)=I$ (uwaga: $L(L+D)=LL+LD$, ale $D(L+D)\neq DL+DD$; dlaczego?). Przyrównując jednomiany tego samego stopnia po obu stronach mamy

$$LL=I \quad \text{oraz} \quad LD=-D(L+D).$$

Lewa strona ostatniej równości składa się z jednomianów stopnia 2. Natomiast po prawej stronie, po rozwinięciu wszystkie jednomiany stopnia 2 dadzą w sumie $-DL$. Stąd $LD=-DL$ i $DL=D(L+D)$. Składając obie strony tej równości prawostronnie z L dostajemy $D= =D(I+DL)$. Dopisując do obu stron $(I+DL)$ mamy $D(I+DL)= =D(I+DL)(I+DL)=D(I+DL+DL(I+DL))=D(I+DL- -LD(I+DL))=D(I+DL-LD)=D(I+DL+DL)$ i ostatecznie $D=D(I+2DL)$. Postępując tak dalej dochodzimy do równości $D=D(I+m\,DL)$ dla dowolnej liczby naturalnej m. Rozważmy pomocniczo układ wielomianów $D-D(I+t\,DL)$ zmiennej t. Wszystkie liczby naturalne są pierwiastkami każdego z tych wielomianów! Ale wielomian (jednej zmiennej) nie może mieć nieskończenie wielu pierwiastków, chyba że jest zerowy. Wtedy każda liczba, w szczególności $t=1/2$, jest jego pierwiastkiem. Zatem $D=D(I+\frac{1}{2}DL)$. Chcemy użyć układu wielomianów $I+\frac{1}{2}DL$ jako układu współrzędnych. W tym celu wskażemy układ odwrotny: jest nim $I-\frac{1}{2}DL$. Istotnie, $(I-\frac{1}{2}DL)(I+\frac{1}{2}DL)=I+\frac{1}{2}DL-\frac{1}{2}DL(I+\frac{1}{2}DL)=I+\frac{1}{2}DL+ +\frac{1}{2}LD(I+\frac{1}{2}DL)=I+\frac{1}{2}DL+\frac{1}{2}LD=I+\frac{1}{2}DL-\frac{1}{2}DL=I$. Wybierając teraz $t=-1/2$ zamiast $t=1/2$ obliczamy w ten sam sposób, że również $(I+\frac{1}{2}DL)(I-\frac{1}{2}DL)=I$.

Podobne rozumowanie prowadzi do równości

$$(L+D)(I+\frac{1}{2}DL)=(I+\frac{1}{2}DL)L,$$

która oznacza
„Przekształcenie L staje się w układzie współrzędnych $I+\frac{1}{2}DL$ przekształceniem $L+D$".

Należy jeszcze, korzystając z tożsamości $LL=I$, znaleźć symetrię, która w pewnym układzie współrzędnych przyjmowałaby postać przekształcenia L. Niech V_1 oznacza podprzestrzeń punktów stałych w V względem przekształcenia L, a V_2 podprzestrzeń złożoną z takich punktów p, dla których $L(p)=-p$. Każdy punkt $p\in V$ można przedstawić jednoznacznie w postaci p_1+p_2, gdzie $p_1=\frac{1}{2}(p-L(p))\in V_1$, a $p_2= =\frac{1}{2}(p+L(p))\in V_2$ (jak mówimy, V jest sumą prostą V_1 i V_2). Niech k_1, k_2 oznaczają wymiary przestrzeni V_1 i V_2. Niech $f=(f_1,f_2,\ldots,f_{k_1})$ i $g=(g_1,g_2,\ldots,g_{k_2})$ będą dowolnymi układami współrzędnych w V_1 i V_2 odpowiednio. Wtedy przekształcenie $h:\mathbf{R}^{k_1+k_2}\to V$ przeprowadzające punkt $(x_1,\ldots,x_{k_1},y_1,\ldots,y_{k_2})$ w $f^{-1}(x_1,\ldots,x_{k_1})+g^{-1}(y_1,\ldots,y_{k_2})$ też jest układem współrzędnych, tym właśnie, którego szukamy. Natomiast potrzebna nam symetria w $\mathbf{R}^{k_1+k_2}$ będzie przekształcała każdy punkt $(x,y)=(x_1,\ldots,x_{k_1},y_1,\ldots,y_{k_2})$ w $(-x,y)=(-x_1,\ldots,-x_{k_1},y_1,\ldots,y_{k_2})$. Istotnie, przekształcenie L przeprowadza punkty $h(x,y)$ w $h(-x,y)$, czyli L przedstawia symetrię w układzie współrzędnych h, co kończy dowód twierdzenia.

W kilka miesięcy później w *Młodym Matematyku* ukazał się następujący artykuł.

Marek Katz (na życzenie autora redakcja *Młodego Matematyka* zastosowała taką wersję pisowni nazwiska)

O nowym sposobie rozwiązywania równań stopnia trzeciego

Chcąc rozwiązać równanie $x^3+ax^2+bx+ +c=0$, podstawiamy

$$z=x-\frac{1}{3}a$$

i otrzymujemy równanie, pozbawione drugiej potęgi niewiadomej:

$$(1) \qquad x^3+px+q=0,$$

gdzie p i q są wyrazami, zależnemi od a,b i c. Pragnę tu podać pewien – jak mi się wydaje – nowy sposób rozwiązywania równań typu (1).

Sposób mój polega na znalezieniu takich liczb A, B, m, n, aby przy każdej wartości x była spełniona równość

$$(2) \quad x^3+px+q=A(x+m)^3-B(x+n)^3.$$

Wtedy otrzymamy równanie w postaci

$$(3) \qquad A(x+m)^3-B(x+n)^3=0$$

i łatwo je będzie rozwiązać; zauważmy bowiem, że lewa strona równania rozkłada się na czynniki:

$$\begin{aligned}A(x+m)^3-B(x+n)^3&=\\ =\left[\sqrt[3]{A}(x+m)-\sqrt[3]{B}(x+n)\right]&\times\\ \times\left[\sqrt[3]{A^2}(x+m)^2+\sqrt[3]{AB}(x+m)(x+n)+\right.&\\ \left.+\sqrt[3]{B^2}(x+n)^2\right]&.\end{aligned}$$

Przyrównywając ten iloczyn do zera, mamy dwie możliwości:

$$(4) \qquad \sqrt[3]{A}(x+m)-\sqrt[3]{B}(x+n)=0,$$

$$(5) \qquad \begin{aligned}&\sqrt[3]{A^2}(x+m)^2+\\ &+\sqrt[3]{AB}(x+m)(x+n)+\\ &+\sqrt[3]{B^2}(x+n)^2=0.\end{aligned}$$

Jak widzimy, z równania (4) łatwo będzie znaleźć jeden z pierwiastków danego równania (1).

Zajmijmy się przeto znalezieniem liczb A, B, m i n. Rozwijając prawą stronę równości (2), otrzymamy:

$$\begin{aligned}x^3+px+q&=\\ =(A-B)x^3&+3(Am-Bn)x^2+\\ +3(Am^2-Bn^2)x&+(Am^3-Bn^3).\end{aligned}$$

Jeżeli dwa wielomiany jednej zmiennej przybierają przy każdej wartości tej zmiennej równe wartości, to współczynniki przy odpowiednio równych potęgach zmiennej muszą być równe:

$$A - B = 1,$$
$$Am - Bn = 0,$$
$$Am^2 - Bn^2 = \frac{1}{3}p,$$
$$Am^3 - Bn^3 = q.$$

Mamy rozwiązać układ 4 równań z 4 niewiadomemi. Z pierwszego równania wyznaczamy $A = B + 1$ i podstawiamy do pozostałych równań:

$$B(m-n) + m = 0,$$
$$B(m^2 - n^2) + m^2 = \frac{1}{3}p,$$
$$B(m^3 - n^3) + m^3 = q.$$

Wyznaczamy teraz zespół $B(m-n) = -m$ i podstawiamy do dwóch ostatnich równań:

$$-m(m+n) + m^2 = \frac{1}{3}p,$$
$$-m(m^2 + mn + n^2) + m^3 = q.$$

Po uproszczeniach otrzymujemy:

$$mn = -\frac{1}{3}p,$$
$$m + n = \frac{3q}{p},$$

przyczem zakładamy, że $p \neq 0$. (Przypadek, gdy $p = 0$, daje równanie $x^3 + q = 0$, którego rozwiązanie nie nasuwa trudności).

Wartości m i n znajdziemy jako pierwiastki równania kwadratowego

$$u^2 - \frac{3q}{p}u - \frac{1}{3}p = 0. \tag{6}$$

Jeżeli się okaże, że równanie to ma wyróżnik *dodatni*, to posiada ono dwa pierwiastki *nierówne*. Przyjmując jeden z nich za m, a drugi za n, łatwo będziemy mogli wyznaczyć wartości A i B, mianowicie

$$B = \frac{-m}{m-n}, \qquad A = \frac{-n}{m-n}.$$

Podstawiając te wartości do równania (4) i mnożąc to równanie obustronnie przez $\sqrt[3]{m-n}$, otrzymamy równanie

$$-\sqrt[3]{n}(x+m) + \sqrt[3]{m}(x+n) = 0.$$

Stąd mamy po uporządkowaniu równanie w postaci:

$$(\sqrt[3]{m} - \sqrt[3]{n})x = m\sqrt[3]{n} - n\sqrt[3]{m}.$$

Przekształcając prawą stronę, będziemy mieli:

$$(\sqrt[3]{m} - \sqrt[3]{n})x =$$
$$= \sqrt[3]{mn}(\sqrt[3]{m} - \sqrt[3]{n})(\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n}),$$

a więc ostatecznie będziemy mieli

$$x = \sqrt[3]{mn}(\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n}). \tag{7}$$

Podstawiając do tego wzoru wartości m i n, wyznaczone z równania (6), otrzymamy wzór, znany pod nazwą wzoru **Cardana**.

Brakuje nam liter

Tomasz M. RUSIN

Czy zauważyliście, jak często w problemach fizycznych (choćby tych publikowanych w *Delcie*) znaleźć można sformułowanie w rodzaju „punkt materialny o masie m porusza się z prędkością v ...”? Wydawać by się mogło, że oznaczenie masy jakąkolwiek inną literą niż m jest po prostu niemożliwe! Skąd bierze się takie przywiązanie fizyków do pewnych oznaczeń? Cóż, po części jest to kwestia wygody i przyzwyczajenia. Po części jednak problem jest nieco bardziej skomplikowany i ma wszelkie cechy problemu „zbyt krótkiej kołdry”.

Gdy powstawała fizyka w jej obecnym kształcie, pojawiły się pojęcia takie, jak prędkość, siła, czas. Ich nazwy kojarzyły się z potocznymi określeniami, których uściślenie stanowiły. Jednocześnie, dla wygody, w rozmaitych równaniach zastępowano same pojęcia ich symbolami. Symbolami tymi były na ogół pierwsze litery odpowiednich nazw; z przyczyn historycznych były to nazwy angielskie (v – *velocity*, prędkość, f – *force*, siła, a – *acceleration*, przyspieszenie itp.). I tak symbole zrosły się z pojęciami stając się niemal ich synonimami. Na przeszkodzie tej idylli stanęła jednak sama przyroda, która nieubłaganie dostarczała wciąż nowych i nowych zjawisk. Do ich opisu zaś niezbędne były nowe pojęcia, coraz częściej nie znajdujące swoich odpowiedników w mowie potocznej. Przed fizykami pojawił się więc nowy kłopot: jak nazwać, ale i jak oznaczyć to, co już odkryli. Oznaczenie takie powinno być krótkie, ale jednoznaczne, dopuszczające przy tym różne warianty tej samej wielkości. Przykładem może tu służyć oznaczenie funkcji falowej w mechanice kwantowej, dla którego zarezerwowano grecką literę ψ. W zależności od kontekstu piszemy $\psi(t)$, $\psi_1(t)$, $\psi_1^2(t)$ itp.

Przykład ten pokazuje zresztą coś nowego: oprócz samego symbolu mamy tu także wskaźniki, które precyzują, co dany symbol oznacza. Wskaźniki mogą występować w czterech polach otaczających symbol:

$${}^{\boxed{1}}_{\boxed{2}}\mathrm{X}^{\boxed{3}}_{\boxed{4}}$$

Obecność wskaźników w każdym z tych pól odczytujemy inaczej. Gdy wskaźnik umieścimy w polach 1 lub 2, będziemy mieć do czynienia z liczbą masową lub atomową pierwiastka X (na szczęście, prawie nikt poza fizykami jądrowymi w tych polach niczego nie zapisuje). Znacznie gorzej sytuacja wygląda dla wskaźnika umieszczonego w polu 3. Liczba 2 tam znajdująca się może np. oznaczać zarówno kwadrat liczby x (tzn. $x^2 = x \cdot x$), jak również drugą składową wektora (x^1, x^2, x^3). Gdybyśmy natomiast ujęli dwójkę w nawiasy, (2), niemal każdy rozpoznałby drugą pochodną funkcji X $\left(X^{(2)} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}X\right)$. Pole 4 zasługuje wreszcie na nazwę śmietnika – wrzuca się tam wszystkie możliwe indeksy. Zapis B_1 może oznaczać indukcję pola magnetycznego B_1 (np. pochodzącą od pierwszego źródła), ale także i pierwszą składową wektora $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)$.

Indeksy w symbolach wielkości fizycznych to nie jedyna możliwa komplikacja. Często pojawiają się tam dalsze „ozdobniki”: gwiazdki (X^*), kropki ($\dot{X}$), kreski ($\bar{X}$), daszki ($\hat{X}$), falki ($\tilde{X}$), strzałki ($\vec{X}$) i wszelkie możliwe ich kombinacje. Prowadzić to może do zabawnych nieporozumień. Weźmy np. operację „kropkowania”, czyli różniczkowania względem czasu ($\dot{X} = \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}$) i rozważmy natężenie prądu elektrycznego zwykle oznaczane w elektrotechnice literą i. Co oznacza zapis $\dot{i}$? Na dodatek i jest także matematycznym symbolem jednostki urojonej. Konia z rzędem temu, kto rozszyfruje równanie

$$i\ddot{i} + \dot{i} = i(1 + 2i)^2.$$

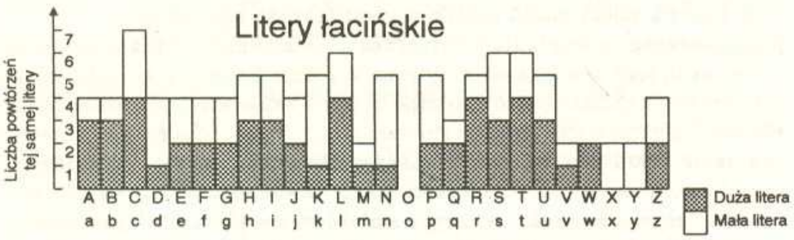
O tym, że nie są to problemy aż tak nieistotne, jak nam się często wydaje, można przekonać się czytając dowolny akademicki podręcznik fizyki.

Czasem aż żal autora, który usiłuje zapisać wzór typu

$$\frac{\text{energia pola}}{\text{jednostka objętości}} = \frac{1}{2}(\text{natężenie pola elektrycznego})^2\,,$$

dobierając różne znaczki przypominające literę E! Sęk jednak w tym, że jednoznaczności jednoliterowych oznaczeń nie da się po prostu osiągnąć.

Zamieszczone wykresy pokazują statystykę używalności rozmaitych liter (greckich i łacińskich) jako standardowych symboli wielkości fizycznych w kilku podręcznikach fizyki. Jak wynika z wykresów, najwięcej używa się do oznaczeń liter łacińskich – 105, z czego 65 przypada na duże i 50 – na małe litery. Średnio każda wielka litera „zajmowana jest" przez 2,17 pojęć fizycznych, mała – przez 1,93 pojęć. Najwięcej pojęć przypada na literę c – 7, najmniej na o – 0 (zapewne, aby uniknąć możliwości pomylenia z zerem). Na tle liter łacińskich użycie liter greckich prezentuje się znacznie skromniej. O ile liczba oznaczeń małymi literami (41) jest porównywalna z analogiczną liczbą dla alfabetu łacińskiego, to już dla dużych liter następuje prawdziwy krach (tylko 10 przypadków zastosowania). Ogólna charakterystyka wykresu przypomina nieco funkcję $f(x) = |\sin x|$ z maksimum dla litery σ (6) i minimum dla ι, o, υ (0).



Liczba dużych liter	55	średnio	2,11	oznaczeń na literę
Liczba małych liter	50	średnio	1,92	oznaczeń na literę
Razem	105	średnio	4,04	oznaczeń na literę

Liczba dużych liter	10	średnio	0,40	oznaczeń na literę
Liczba małych liter	41	średnio	1,84	oznaczeń na literę
Razem	51	średnio	2,00	oznaczeń na literę

Literatura:
1. Resnick, Holiday – *Wstęp do fizyki*, PWN 1974.
2. *Słownik fizyczny*, PWN 1986.
3. *Encyklopedia fizyki współczesnej*, PWN 1984.
4. Landau, Lifszyc – *Krótki kurs fizyki*, PWN 1986.
5. Notatki z zeszytów autora, 1984 – 1988.

Jak zaradzić brakowi odpowiedniej liczby symboli? Narzucającym się sposobem jest użycie oznaczeń wieloliterowych. Ale (niestety) fizycy są leniwi i nie lubią długich symboli. Mamy więc błędne koło. Jednak, być może, istnieje wyjście z tej sytuacji. Nic nikomu nie sugerując zauważmy, że w języku chińskim występuje około 50 000 znaków pisarskich... A tych, którzy pomyślą, że żartuję, odsyłam do książki Bohra i Mottelsona *Struktura jądra atomowego*.

PS. Zachęcam Czytelników do uzupełnienia zamieszczonej statystyki. Można też poszukać wzorów funkcji (ciągłych) najlepiej przybliżających wykresy.

Redakcja *Młodego Matematyka* opatrzyła artykuł Marka Kaca następującym komentarzem.

Udzielając miejsca sposobowi, przedstawionemu przez p. Marka Katza, który jest uczniem VIII klasy gimnazjalnej Liceum Krzemienieckiego, Redakcja musi dodać kilka uwag.

Autor artykułu ograniczył się do rozważenia przypadku, kiedy wyróżnik równania (6) jest dodatni, czyli przypadku, kiedy wyrażenie

$$\left(\frac{1}{2}q\right)^2 + \left(\frac{1}{3}p\right)^3 \tag{8}$$

ma wartość dodatnią. Z teorji równania trzeciego stopnia wiadomo, że w tym przypadku równanie (1) posiada jeden pierwiastek rzeczywisty. Metoda, opisana w artykule, odnosi się do znalezienia tego pierwiastka.

W przypadku, kiedy wyrażenie (8) jest zerem, wyróżnik równania (6) jest zerem, a więc równanie to posiada pierwiastek podwójny:

$$m = n = \frac{3q}{2p}\,.$$

Ale w tym przypadku wzór (7) przybiera postać $x = \frac{3q}{p}$, i nietrudno sprawdzić przez bezpośrednie podstawienie, że wzór ten daje pierwiastek równania (1).

W przypadku, kiedy wyrażenie (8) ma wartość ujemną, m i n nie są liczbami rzeczywistemi. Zachodzi tu przypadek, znany pod nazwą *casus irreducibilis*, – tem osobliwy, że w tym przypadku równanie trzeciego stopnia posiada trzy pierwiastki rzeczywiste, ale nie można ich wyznaczyć drogą algebraiczną. Rzecz jasna, że i metoda, opisana przez p. M. Katza, zawodzi w tym przypadku. W samej rzeczy, równanie

$$(x-1)(x-2)(x+3) = 0$$

posiada trzy pierwiastki: $+1, +2, -3$. Rozwijając lewą stronę, otrzymujemy równanie

$$x^3 - 7x + 6 = 0\,,$$

mamy więc wartości: $p = -7$, $q = 6$. Równanie (6) przybiera postać

$$u^2 + \frac{6}{7}u + \frac{7}{3} = 0\,.$$

Łatwo sprawdzić, że równanie to nie posiada pierwiastków rzeczywistych, a więc nie można wyznaczyć rzeczywistych wartości m i n, skąd jednak nie wynika, by dane równanie trzeciego stopnia nie posiadało pierwiastków.

Poproszony o skomentowanie tegoż tekstu profesor **Andrzej Schinzel** napisał:

„Podana metoda prowadzi łatwo do wyznaczenia wszystkich pierwiastków równania (1). W tym celu należy zauważyć, że jeśli ρ jest pierwiastkiem pierwotnym trzeciego stopnia z 1, to równanie (5) jest równoważne alternatywie

$$\sqrt[3]{A}(x+m)-\rho^{i}\sqrt[3]{B}(x+n)=0 \qquad (i=\pm 1),$$

przy czym wartości $\sqrt[3]{A}$ i $\sqrt[3]{B}$ traktujemy jako ustalone. Podstawiając, jak to zrobił autor notatki,

$$B=\frac{-m}{m-n}, \qquad A=\frac{-n}{m-n},$$

gdzie m, n są pierwiastkami równania (6), i mnożąc przez $\sqrt[3]{m-n}$ otrzymamy

$$-\sqrt[3]{n}(x+m)+\rho^{i}\sqrt[3]{m}(x+n)=0.$$

Stąd

$$(\rho^{i}\sqrt[3]{m}-\sqrt[3]{n})x=m\sqrt[3]{n}-n\rho^{i}\sqrt[3]{m}=$$
$$=\sqrt[3]{mn}[\sqrt[3]{m}-\sqrt[3]{n}\rho^{2i}][\sqrt[3]{m}+\sqrt[3]{n}\rho^{2i}]$$

i ostatecznie

$$x=\sqrt[3]{mn}(\rho^{-i}\sqrt[3]{m}+\rho^{i}\sqrt[3]{n}), \qquad (i=\pm 1).$$

Przypadek $i=0$ odpowiada równaniu (4) rozpatrzonemu przez M. Kaca. Biorąc $i=0,\pm 1$ otrzymujemy wszystkie pierwiastki równania (1) również i wtedy, gdy wyróżnik równania (6) jest niedodatni."

Wbrew pozorom komentarz *Młodego Matematyka* i przytoczony, współczesny komentarz profesora Schinzla nie są sprzeczne.

Już od momentu opublikowania wzorów Cardana było wiadomo, że pozwalają one na znalezienie pierwiastków również dla *casus irreducibilis*, ale przy przejściu podczas obliczeń przez rachunki na liczbach zespolonych. A to uważano za metodę „podejrzaną".

Około 1600 roku został znaleziony (przez François Viète) sposób na rozwiązanie *casus irreducibilis* w obrębie liczb rzeczywistych – przez odpowiednie podstawienie trygonometryczne. I uwagi redakcji *Młodego Matematyka* dotyczą spostrzeżenia, że rachunki Marka Kaca takiej możliwości nie stwarzają.

Profesor Andrzej Schinzel natomiast zwraca uwagę na fakt, że dopuszczając rachunki na liczbach zespolonych można dojść do rozwiązania *casus irreducibilis* również drogą zaproponowaną przez kilkunastoletniego Marka Kaca.

Dlaczego piszemy po chińsku?

Około roku 220 p.n.e. zagrożone pierwszymi najazdami Mongołów państwa Chin zjednoczyły się. Zjednoczenia dokonał Ts'in Szy-huang-ti i on został cesarzem kolejnego (co najmniej czwartego w dziejach Chin) imperium.

Był to człowiek bardzo energiczny, miał niezmiernie ambitne plany, nie brakowało mu też zdecydowania w realizacji swoich zamierzeń. To on zbudował Wielki Mur (jedyną budowlę widoczną „gołym okiem" ze stacji orbitalnych) – miała ona chronić Chiny przed najazdem (i przez ponad 1400 lat spełniała skutecznie swoje zadanie). Wprowadził jednolite miary i wagi oraz, używane po dziś dzień, pismo ideograficzne. O tym właśnie piśmie chciałem napisać kilka uwag. Pożegnajmy się jednak z jego promotorem: brutalne rządy Ts'in Szy-huang-ti skończyły się zamordowaniem cesarza w 206 r.p.n.e, ale cesarstwo nie rozpadło się – jego następcy, znani jako dynastia Han, doprowadzili imperium chińskie do największego, w dziejach Chin, rozkwitu (dość powiedzieć, że na początku naszej ery graniczyło ono na zachodzie bezpośrednio z Cesarstwem Rzymskim).

Podstawową zaletą pisma chińskiego jest fakt, że nie ma ono jednoznacznego odczytania fonetycznego. Dokładniej: w różnych językach mówionych jego znaki są odczytywane w różnie brzmiący sposób. Dlatego też literatura chińska (zarówno piękna, jak i naukowa) jest jedna, choć na terenie Chin używa się kilkunastu różnych języków. Nie sposób przecenić znaczenia tego faktu dla utrzymania spoistości kulturowej ogromnego i często politycznie rozdrobnionego kraju. O sile tego pisma świadczy dobitnie używanie go (bez żadnych zmian) za sposób notowania prac naukowych przez (zawsze dość nacjonalistycznie nastawioną) Japonię.

Dlaczego warto o tym wspominać przy okazji matematyki? Otóż dlatego, że matematycy również posługują się pismem ideograficznym. Z tych samych powodów i z tym samym pozytywnym skutkiem co Chińczycy. Napis „1247" czy „$x^2-4x+\sqrt{12}=0$" odczytuje się fonetycznie zupełnie inaczej po polsku, niż po angielsku, rosyjsku czy węgiersku. Znaczą jednak te napisy wszędzie to samo. Umożliwia to istnienie wspólnej kultury matematycznej dla matematyków całego świata i wielce w rozwijaniu matematyki pomaga.

Zaleta ta została przejęta przez wszystkie nauki korzystające z matematyki i powoduje, że możemy dziś mówić o jednej na całym świecie fizyce, chemii itd. Podczas gdy mówienie o wspólnym dorobku dyscyplin humanistycznych całego świata byłoby w chwili obecnej niesensowne (czy co najmniej przedwczesne). Tak więc zasadnicza różnica w światowym funkcjonowaniu tego, co anglosasi nazywają *science* i *art*, ma powody (paradoksalnie) językowe.

Tych kilka uwag nasunęło mi się przy czytaniu artykułu Tomasza Rusina o symbolice fizycznej. Jest to bowiem dyskusja o tym, jak z liter pisma alfabetycznego produkować ideogramy funkcjonujące właśnie na zasadzie hieroglifów chińskich.

I jeszcze jedna uwaga. Od czasu do czasu Europejczycy wpadają na pomysł, by oświecić Chińczyków, ułatwić im życie (a w szczególności czytanie i pisanie) przez wprowadzenie u nich pisma alfabetycznego. Trudno o bardziej absurdalny pomysł. Żeby ten absurd zrozumieć w pełni, warto spróbować zebrać argumenty za tym, by matematycy zrezygnowali ze swoich formalizmów i w swoich pracach używali zwyczajnego, alfabetycznego, zgodnego z fonetyką pisma. Do tego matematycy skłonić się nie dadzą. Mają zresztą ważny powód. Przez dwa i pół tysiąca lat tak notowano matematykę i ostatecznie zdecydowano się na dzisiejszy, ideograficzny sposób pisania niewiele ponad 300 lat temu. A jakie to dało wyniki, każdy może stwierdzić wiedząc, jak wielki skok odnotowała matematyka w XVII wieku.

Marek KORDOS

Dlaczego wzrasta liczba wypadków samochodowych ?

W ostatnich miesiącach prasa, radio i telewizja wielokrotnie donosiły o dramatycznym wzroście liczby wypadków samochodowych. Zaznaczano jednocześnie, że wzrost ten jest nieproporcjonalny do wzrostu liczby samochodów. A mianowicie, przy powiększeniu się liczby samochodów o 30 % liczba wypadków wzrosła o 70 % w tym samym okresie. Różnica wspomnianych liczb dała powód do wielu dyskusji, w których podkreślano coraz bardziej niebezpieczny sposób jazdy wielu kierowców, pogarszający się stan dróg itp. Ta różnica również ma być istotną przyczyną złej sytuacji finansowej Państwowego Zakładu Ubezpieczeń (PZU), jako że wpływy tej instytucji są proporcjonalne do liczby samochodów, wydatki zaś do liczby wypadków.

Czy doprawdy ów dramatyczny wzrost liczby wypadków jest nieoczekiwany, czy nie można go było przewidzieć? Poniżej spróbuję pokazać, że obserwowany wzrost w pełni zgadza się z rezultatami prostych kombinatorycznych rozważań.

Zacznijmy od skonstruowania modelu omawianego zjawiska. Zakładamy, że w typowym wypadku uczestniczą dwa samochody. Zdarzają się, oczywiście, wypadki z udziałem tylko jednego samochodu, np. najechanie na przydrożne drzewo bądź wielosamochodowe karambole, lecz przyjmujemy, że wypadki takie zdarzają się rzadko w porównaniu ze zderzeniami dwóch samochodów. Dalej przyjmujemy, że dany samochód ma jednakową szansę zderzenia się z każdym innym samochodem poruszającym się w określonym terenie, np. w mieście. Wobec tego liczba wypadków w danym mieście będzie proporcjonalna do liczby wszystkich możliwych par samochodów. Jak pamiętamy, liczba takich par wyraża się za pomocą symbolu Newtona, tj.

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2},$$

gdzie n jest liczbą samochodów. Gdy liczba ta jest dostatecznie duża, $n(n-1)$ można przybliżyć przez n^2. Tak więc, jeśli liczba samochodów wzrasta k razy w pewnym okresie i warunki ruchu drogowego nie ulegają zmianie w tym czasie, liczba wypadków, zgodnie z naszym modelem, wzrasta k^2 razy.

Przedstawiony model świetnie zgadza się z liczbami wspomnianymi na wstępie. Wzrost liczby samochodów o 30% oznacza, że $k = 1,3$, zaś $k^2 = 1,69$, co prowadzi, w przybliżeniu, do 70 % wzrostu liczby wypadków. A więc wzrost ten jest prostą konsekwencją wzrostu liczby samochodów bądź inaczej – ich gęstości na drogach. Jeśli warunki, w jakich odbywa się ruch drogowy, nie będą ulegały istotnej poprawie, będziemy obserwować kwadratowy, a więc bardzo szybki, wzrost liczby wypadków.

Nasz model można zastosować do innych warunków. Wyobraźmy sobie np. kraj, w którym liczba samochodów jest tak niewielka, że bardzo rzadko dochodzi do zderzenia dwóch pojazdów i typowym wypadkiem jest najechanie przeszkody przez jeden samochód. Albo całkiem inny kraj, w którym tłok na drogach jest tak wielki, że najczęściej dochodzi do karambolu czterosamochodowego. Jak szybki będzie wzrost liczby wypadków w tych krajach przy zwiększaniu się liczby samochodów?

Stanisław MRÓWCZYŃSKI

Na koniec warto dodać, że Marek Kac po latach przekonał się, że odkryta przez niego w 1930 roku metoda jest zastosowaniem twierdzenia Sylvestera do rozwiązywania równań trzeciego stopnia. Twierdzenie to brzmi:

Każda dostatecznie ogólna forma dwójkowa nad ciałem K, stopnia $2n-1$ jest sumą n form liniowych, których współczynniki dają się wyznaczyć przez rozwiązanie równania stopnia n nad ciałem K.

(J. J. Sylvester, *The collected mathematical papers*, vol. I, Cambridge 1904, str. 203–216 oraz 265–283, oraz A. Cayley, *The collected mathematical papers*, vol. IV, str. 43–53.)

Rozwiązanie zadania F 808.
Niech r oznacza promień włókna, l jego długość, P – moc żarówki, U – napięcie, T – temperaturę włókna podczas pracy, R – opór żarówki podczas pracy. Praktycznie cała pobrana moc zostaje wypromieniowana przez włókno. Stosując prawo Stefana – Boltzmanna dostaniemy

$$P = 0,4 \cdot \sigma T^4 \cdot 2\pi r l,$$

gdzie $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{W/(m^2K^4)}$ – stała Boltzmanna, a $2\pi r l$ jest powierzchnią włókna. Moc prądu elektrycznego dana jest wzorem

$$P = U \cdot I = \frac{U^2}{R},$$

gdzie

$$R = \rho[1 + \alpha(T - 273\mathrm{K})]\frac{l}{\pi r^2}.$$

Eliminując r rozwiązujemy powyższe równanie względem l

$$l = \sqrt[3]{\frac{PU^2}{\rho(1+\alpha(T-273))4\pi(0,4\sigma T^4)^2}} = 0,67\ \mathrm{m}.$$

Włókno jest zwinięte w spiralę, aby zmieściło się w żarówce.

Rozwiązanie zadania F 809.
Niech P oznacza moc silnika pojazdu, u – prędkość wiatru. Dla dużych prędkości siła oporu powietrza jest dominującą siłą oporów ruchu i jest ona proporcjonalna do kwadratu prędkości pojazdu względem powietrza. Moc jest równa sile oporów pomnożonej przez prędkość pojazdu. Stąd $p \sim v_m^3$ oraz $p \sim (v+u)^2 \cdot v$; otrzymujemy

$$(v+u)^2 \cdot v = v_m^3 \Rightarrow$$

$$u = \sqrt{\frac{v_m^3}{v}} - v \approx 15\ \mathrm{km/h}.$$