

# Kulą w płot, czyli i Ty zostaniesz Rutherfordem

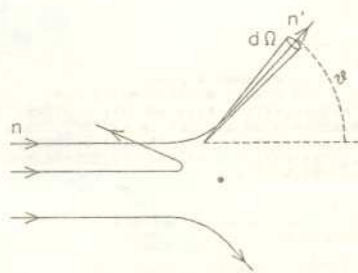
Paweł KRAWCZYK

Czy strzelając z pistoletu w płot możemy dowiedzieć się czegoś o konstrukcji płotu? Na pozór pytanie wydaje się pozbawione sensu, a odpowiedź na nie – negatywna. Istotnie, pocisk wybije w płocie dziurę uszkadzając go w mniejszym lub większym stopniu i poleci dalej nieomal tak, jakby płotu w ogóle nie było. Co zdarzy się jednak, jeśli płot uzbrojony zostanie stalowymi sztchetami? Strzelając wielokrotnie, nawet zupełnie na ślepo, trafimy kiedyś w taką sztchetę i wówczas pocisk, np. odbiwszy się od niej, poleci dalej w kierunku zupełnie różnym od początkowego. Wniosek stąd taki, że przy licznych strzałach możemy – badając odchylenia pocisków od kierunku początkowego – stwierdzić istnienie w płocie części składowych o rozmiarach znacznie mniejszych od rozmiarów samego płotu.

Na szczęście, badając płoty możemy posłużyć się innymi, „nieinwazyjnymi” (tak określają to lekarze) metodami. Inaczej jest jednak z obiektami mikroświata. Tu brutalne bombardowanie bywa jedynym dostępnym środkiem. Oczywiście, rolę pocisków pełnią cząstki elementarne, a i płot zostaje przez nie zastąpiony. Zasada pozwalająca na poznanie struktury bombardowanych obiektów pozostaje jednak ta sama. Co więcej, jej zastosowanie, to, no, może nie gwarancja, ale dobra podstawa do zdobycia Nagrody Nobla. To właśnie w ten sposób sir Ernest Rutherford odkrył w 1911 r. jądro atomowe. Również laureaci Nagrody Nobla z 1990 r., Jerome Friedman, Henry Kendall i Richard Taylor wykryli punktowe składniki protonu (dziś znane jako kwarki) w przeprowadzonym w końcu lat 60. doświadczeniu, w którym protony były bombardowane wysokoenergetycznymi elektronami.

Chciałbym zaproponować Czytelnikom powtórzenie doświadczenia Rutherforda ... Co prawda, nie będziemy zbyt drobiazgowymi naśladowcami wielkiego uczonego i zamiast strzelać cząstkami  $\alpha$  do atomów złota, cały proces przeprowadzimy za pomocą komputera. Ale żeby to zrobić, musimy przypomnieć sobie, co właściwie mierzył Rutherford w swoim doświadczeniu. Jak bowiem na fizyka przysłało, nie zadowolili się on stwierdzeniem, że cząstki  $\alpha$  przechodzące przez złotą folię zmieniają kierunek lotu, lecz ujął swoją obserwację w formę liczbowej zależności.

Wielkością mierzoną przez Rutherforda był tzw. różniczkowy przekrój czynny. Co to takiego? Wyobraźmy sobie, że na pewien obiekt (zwany centrum rozpraszania) kierujemy wiązkę cząstek (patrz rysunek).



Jeżeli masa centrum jest znacznie większa od masy każdej z cząstek, a tak właśnie było w doświadczeniu Rutherforda, to ruch centrum możemy zaniedbać. Wie o tym każdy, kto kiedykolwiek odbijał piłkę od ściany. Prześledźmy teraz przebieg badanego zjawiska. Gdy cząstki znajdują się daleko od centrum, „nie czują” jego obecności i poruszają się po liniach prostych o kierunku  $\vec{n}$ . Im bliżej centrum, tym oddziaływanie staje się silniejsze i w efekcie tory cząstek ulegają odchyleniu. Zwykle padających cząstek jest bardzo dużo i nie ma możliwości kontrolowania wzajemnego położenia cząstek i centrum (determinującego odchylenie). Po prostu przyjmujemy, że to położenie jest całkowicie przypadkowe. Ale nawet w tej sytuacji możemy stwierdzić, ile cząstek uległo odchyleniu tak, że ich tory znalazły się po rozproszeniu w elemencie kąta bryłowego  $d\Omega$  wokół końcowego kierunku  $\vec{n}'$ . Liczba ta określa właśnie różniczkowy przekrój czynny  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  zgodnie ze wzorem

$$\left[ \frac{d\sigma(\vec{n}, \vec{n}')}{d\Omega} \right] d\Omega = \frac{\text{liczba cząstek rozproszonych w } d\Omega}{\text{liczba cząstek padających na jednostkę powierzchni poprzecznej do wiązki}}$$

Zauważmy jeszcze, że jeśli oddziaływanie między centrum a cząstkami zależy tylko od ich odległości (a jest to sytuacja często spotykana w przyrodzie), to różniczkowy przekrój czynny, jako wielkość skalarna, może zależeć od zmiennych przestrzennych tylko i wyłącznie poprzez iloczyn  $\vec{n} \cdot \vec{n}'$ , a więc po prostu kąt  $\theta$  między kierunkiem padania a kierunkiem rozproszenia. W tym przypadku zamiast mówić o kącie bryłowym  $d\Omega$  wokół kierunku  $\vec{n}'$  możemy rozważać kąt bryłowy zawarty między dwoma współwierzchołkowymi stożkami o kątach rozwarcia  $\theta$  i  $\theta + d\theta$  (oczywiście, osie stożków muszą mieć kierunek  $\vec{n}$ ). Taki kąt bryłowy daje się obliczyć i wynosi  $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$ .

Przekrój czynny jako funkcja kąta  $\theta$  zależy, oczywiście, od tego, jaka jest postać oddziaływania między centrum a cząstkami i jest w zasadzie obliczalny. Dziś wiemy, że w przypadku doświadczenia Rutherforda oddziaływanie dane jest (z dobrym przybliżeniem) siłą coulombowskiego odpychania między cząstką  $\alpha$  a jądrem złota

$$\vec{F} = \frac{k}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

(tutaj  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_\alpha q_{\text{Au}}$ , a  $r$  jest promieniem wodzącym poprowadzonym od jądra atomu złota). Można wykazać (pierwszy zrobił to sam Rutherford), że w tym przypadku

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{k}{4E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}},$$

gdzie przez  $E$  oznaczyliśmy energię cząstek. A jaki jest wynik doświadczenia? Żeby go uzyskać, będziemy w naszym komputerowym eksperymencie śledzić ruch poszczególnych cząstek imitując przypadkowość ich rozkładu w wiązce przez losowanie początkowej odległości cząstki od prostej o kierunku  $\vec{n}$  i przechodzącej przez centrum (nawiasem mówiąc wielkość ta nosi fachową nazwę parametru zderzenia). Aby wyznaczyć ruch z drugiej zasady dynamiki ( $m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$ ), posłużymy się prostym algorytmem wynikającym z takiej oto obserwacji:

Rozwińmy w szereg Taylora funkcję  $\bar{r}(t \pm \Delta t)$ . Dostaniemy

$$\bar{r}(t \pm \Delta t) = \bar{r}(t) \pm \Delta t \cdot \left. \frac{d\bar{r}}{dt} \right|_t + \frac{1}{2!} (\Delta t)^2 \left. \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} \right|_t \pm \frac{1}{3!} (\Delta t)^3 \left. \frac{d^3\bar{r}}{dt^3} \right|_t + \dots,$$

skąd po dodaniu obu przypadków otrzymamy

$$(*) \quad \bar{r}(t + \Delta t) \approx 2\bar{r}(t) - \bar{r}(t - \Delta t) + \frac{1}{m} (\Delta t)^2 \cdot \bar{F}(t).$$

To już niemal wszystko, co potrzeba do symulacji doświadczenia Rutherforda. Dyskusję kilku dalszych zagadnień pomocnych w zrozumieniu działania zamieszczonego programu zainteresowany Czytelnik znajdzie w *Dodatku*. Wyjaśnienia wymaga jedynie sposób wizualizacji wyników. W programie prezentowane są one na ekranie w dwóch okienkach. W pierwszym kreślone są tory kolejnych cząstek, a w drugim pokazujący jest wykres ..., no właśnie, czego? Chciałoby się widzieć tu wykres przekroju czynnego w zależności od kąta rozpraszania  $\theta$ . Z tym jednak jest pewien kłopot. Przecież prawdopodobieństwo rozproszenia cząstki pod kątem **dokładnie równym**  $\theta$  jest zerowe! Trzeba więc raczej brać pod uwagę cząstki rozproszone w kierunkach znajdujących się w pewnym **skończonym** przedziale kątów. Dlatego program pyta się o liczbę takich przedziałów (i równo dzieli zakres kątów ( $0^\circ, 180^\circ$ )), a wykres przekroju czynnego ma postać słupków, których wysokość jest proporcjonalna do liczby cząstek rozproszonych w danym przedziale kątów. Wykres tego typu nosi nazwę histogramu.

Mam nadzieję, że możliwość wcielenia się w Ernesta Rutherforda dostarczy Czytelnikom przyjemnych wrażeń. Tym bardziej że program pozwala na przeprowadzenie „doświadczenia” także z modelem atomu, popularnym na przełomie wieków, w którym ładunek jądra rozłożony jest nie punktowo, lecz w całej objętości atomu. Takich możliwości sir Ernest nie miał! A jestem pewien, że Czytelnicy z łatwością zmodyfikują program tak, by uwzględnił on jeszcze inne modele atomu i inne oddziaływania z jądrem.

## Dodatek

Wzór (\*) można przepisać w nieco innej postaci, w której występują jedynie wielkości bezwymiarowe. W tym celu zauważymy, że jeśli  $E$  jest energią cząstki, to wielkość  $l = \frac{h}{E}$  ma wymiar długości, a wielkość  $\bar{t} = \sqrt{\frac{ml^3}{k}}$  - wymiar czasu. Dzielać równanie (\*) przez  $l$  i wprowadzając następujące oznaczenia:

$$\tau = \bar{t}/\bar{t}, \quad \bar{\rho} = \frac{1}{l} \bar{r},$$

$$\tau_n = n \cdot \Delta\tau, \quad \bar{\rho}_n = \bar{\rho}(\tau_n) \quad (n = 0, 1, 2 \dots),$$

możemy ostatecznie stwierdzić, że

$$(**) \quad \bar{\rho}_{n+1} = 2\bar{\rho}_n - \bar{\rho}_{n-1} + (\Delta\tau)^2 \cdot \frac{\bar{\rho}_n}{\bar{\rho}_n^3}.$$

Związek ten nadaje się już bezpośrednio do zastosowania w programie komputerowym. Jednak, by program ten działał poprawnie, musimy spełnić pewne dodatkowe warunki.

Program został napisany w wersji języka BASIC dla komputera IBM PC wyposażonego w kartę graficzną CGA.

```

10 REM
20 REM I TY ZOSTANIESZ RUTHERFORDEM...
30 REM (C) Paweł Krawczyk, 1991
40 REM
50 DEFINT I-M : KEY OFF : RANDOMIZE TIMER : LBRK=0 : NCL=0
60 CLS : SCREEN 0 : WIDTH 80
70 INPUT "Wybierz atom Rutherforda (1) lub Thomsona (0)"; ICHA
80 PRINT "Podaj liczbę podziałów dla kąta rozpraszania";
90 PRINT " (np. 18 lub 36)";
100 INPUT " "; NHIST
110 INPUT "Podaj minimalny kat rozproszenia (w stopniach)"; AO
120 IMI=INT(AO*NHIST/180)
130 DT=.5 : RO=20 : ASPC=4/3! : BSCL=8 : PI=ATN(1)*4
140 DIM RON(2),RON1(2),RONX(2),FORCE(2),RPC(NHIST)
150 NXW1=3 : NYW1=80 : MXW1=70 : MYW1=199
160 NXW2=172 : NYW2=2 : MXW2=319 : MYW2=130
170 NXC1=(MXW1-NXW1)/2+NXW1 : NYC1=(MYW1-NYW1)/2+NYW1
180 SCY1=RO/ASPC*(MYW1-NYW1)/(MXW1-NXW1) : ROO=RO*RO
190 CLS : SCREEN 1 : COLOR 0,0
200 GOSUB 800
210 LOCATE 3,3 : PRINT "I TY ZOSTANIESZ"
220 LOCATE 4,3 : PRINT "RUTHERFORDEM..."
230 LOCATE 6,3
240 IF (ICHA=1) THEN PRINT "Atom Rutherforda" : GOTO 260
250 PRINT "Atom Thomsona"
260 LINE (NXW2,NYW2)-(MXW2,MYW2),3,B
270 LOCATE 16,23 : PRINT "0" : LOCATE 16,37 : PRINT "180"
280 NSTART=NXW2+5 : KWD=INT((MXW2-MXW2-7)/NHIST)
290 NEND=NSTART+KWD*NHIST : NBAR=MYW2-16
300 LINE (NSTART,NBAR)-(NEND,NBAR),2
310 LINE (NSTART,NBAR)-(NSTART,NBAR+4),2
320 LINE (NEND,NBAR)-(NEND,NBAR+4),2
330 NP=NSTART+(NEND-NSTART)/2 : LINE (NP,NBAR)-(NP,NBAR+4),2
340 LOCATE 16,30 : PRINT "90"
350 FOR I=1 TO NHIST-1
360 LINE (NSTART+I*KWD,NBAR)-(NSTART+I*KWD,NBAR+2),2
370 NEXT
380 NP=0 : DT2=DT*DT : IN=1 : NCL1=0 : IDIV=0 : LRTH=0
390 ON KEY(1) GOSUB 850 : KEY(1) ON
400 ON KEY(2) GOSUB 880 : KEY(2) ON
410 ON KEY(3) GOSUB 1050 : KEY(3) ON
420 LOCATE 20,24 : PRINT "F1 - konczy"
430 LOCATE 21,24 : PRINT "F2 - czysci okno"
440 LOCATE 22,24 : PRINT "F3 - krzywa"
450 LOCATE 23,29 : PRINT "teoretyczna"
460 WHILE 1
470 IF (NCL1=1) THEN NCL1=1 : NCL1=0
480 NP=NP+1 : IN=-IN : X=RND : Y=RND : B=SQR(X*X+Y*Y)*BSCL*IN
490 LOCATE 9,3 : PRINT USING "Czastka nr ####";NP
500 RON(0)=-RO : RON(1)=B
510 RON1(0)=-RO+SQR(2)*DT : RON1(1)=B
520 RONX(0)=RON1(0) : RONX(1)=B
530 WHILE (RON1(0)^2+RON1(1)^2<=B*B+ROO+1)
540 NWX=NXW1 : NYW=NYW1 : MWX=MXW1
550 MWY=MYW1 : SCX=RO : SCY=SCY1
560 NXC=NXC1 : NYC=NYC1
570 X1=RON(0) : Y1=RON(1) : X2=RON1(0) : Y2=RON1(1)
580 GOSUB 1070 : GOSUB 1160
590 RON1(0)=2*RON1(0)-RON(0)+DT2*FORCE(0)
600 RON1(1)=2*RON1(1)-RON(1)+DT2*FORCE(1)
610 RON(0)=RONX(0) : RON(1)=RONX(1)
620 RONX(0)=RON1(0) : RONX(1)=RON1(1)
630 WEND
640 GOSUB 800
650 DIFX=RON1(0)-RON(0) : DIFY=(RON1(1)-RON(1))*IN
660 IF (DIFX=0) THEN TETA=PI/2*SGN(DIFY) ELSE TETA=ATN(DIFY/DIFX)
670 IF (TETA<0) THEN TETA=TETA+PI
680 NTET=INT(TETA*NHIST/PI) : RPC(NTET)=RPC(NTET)+1/2*IDIV
690 IF (LRTH=6) THEN GOSUB 910
700 IF (LRTH>1) THEN LRTH=LRTH-1
710 IF (NTET=IMI) THEN GOTO 750
720 IF (LRTH=1) THEN GOSUB 1310 : LRTH=0 : GOTO 750
730 IF (RPC(NTET)<NBAR-NYW2-4) THEN GOSUB 1250 : GOTO 750
740 IDIV=IDIV+1 : GOSUB 1310
750 IF (LBRK=1) THEN GOTO 770
760 WEND
770 SCREEN 0 : WIDTH 80 : KEY ON
780 END
790 REM
800 REM procedura zaznacza centrum rozpraszania
810 LINE (NXW1,NYW1)-(MXW1,MYW1),3,B
820 CIRCLE (NXC1,NYC1),1,2,1 : PSET (NXC1,NYC1),2
830 RETURN
840 REM
850 REM przerwanie programu
860 LBRK=1 : RETURN
870 REM
880 REM czyszczenie okienka 1
890 NCL1=1 : RETURN
900 REM
910 REM procedura dopasowuje do histogramu krzywa teoretyczna
920 FCT=RPC(NHIST/9)*SIN(5*PI/72)^3/COS(5*PI/72)
930 DEL=(1-1.5/NHIST)*PI/50
940 X1=1.5*PI/NHIST : MX1=INT(NSTART+X1/PI*(NEND-NSTART))
950 MY1=FCT/SIN(X1/2)^3*COS(X1/2)
960 FOR J=1 TO 49
970 X2=1.5*PI/NHIST+J*DEL : MY2=COS(X2/2)/SIN(X2/2)^3*FCT
980 MX2=INT(NSTART+X2/PI*(NEND-NSTART))
990 IF (MY1>NBAR-NYW2-4) THEN GOTO 1010
1000 LINE (MX1,NBAR-MY1)-(MX2,NBAR-MY2),2
1010 X1=X2 : MX1=MX2 : MY1=MY2
1020 NEXT
1030 RETURN
1040 REM
1050 REM krzywa teoretyczna
1060 LRTH=6 : RETURN
1070 REM procedura rysuje element krzywej
1080 IF (NCL=1) THEN LINE (NWX+1,NWY+1)-(MWX-1,MWY-1),0,BF : NCL=0
1090 AX1=ABS(X1) : AX2=ABS(X2) : AY1=ABS(Y1) : AY2=ABS(Y2)
1100 IF (AX1>SCX OR AX2>SCX OR AY1>SCY OR AY2>SCY) THEN RETURN
1110 NX1=X1/SCX*(MWX-NWX)/2+NXO : NX2=X2/SCX*(MWX-NWX)/2+NXO
1120 NY1=NYO-Y1/SCY*(MWY-NWY)/2 : NY2=NYO-Y2/SCY*(MWY-NWY)/2
1130 LINE (NX1,NY1)-(NX2,NY2),1
1140 RETURN
1150 REM
1160 REM procedura oblicza wektor sily FORCE
1170 ROO=SQR(RO1(0)^2+RO1(1)^2)
1180 RO3=ROO^3
1190 FORCE(0)=RO1(0)/RO3 : FORCE(1)=RO1(1)/RO3
1200 IF (ICHA=1) THEN GOTO 1230

```

Po pierwsze, chcemy, by w chwili początkowej ( $n = 0$ ) oddziaływanie z centrum było zaniedbywalnie małe.

Oznacza to, że energia potencjalna ( $E_p = \frac{k}{r}$ ) musi być znacznie mniejsza niż energia kinetyczna, która tym samym powinna pokrywać się z energią całkowitą. Łatwo stąd wyliczyć, że

$$(\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_0)^2 = 2(\Delta\tau)^2, \quad \rho_0 \gg 1.$$

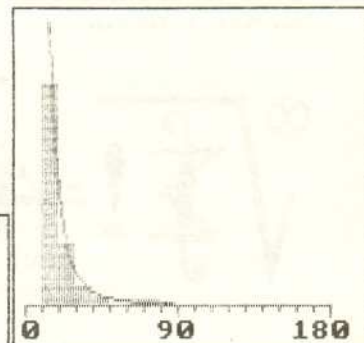
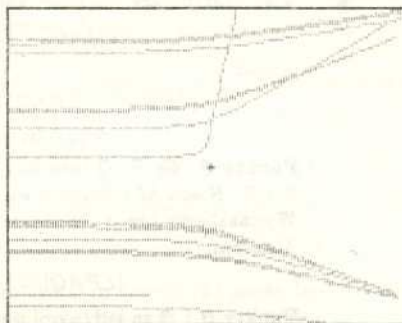
Dalsze ograniczenie wyniku z żądania, by równanie (\*\*) dobrze przybliżało rozwiązanie otrzymywane z ciągłej formy drugiej zasady dynamiki. W tym celu musimy zażądać, by wyraz proporcjonalny do  $(\Delta\tau)^2$  w równaniu (\*\*) był mały w porównaniu z dwoma innymi wyrazami. Ponieważ  $\rho_n \leq 1$ , sprowadza się to do warunku

$$\Delta\tau \ll 1.$$

Na zakończenie jeszcze uwaga dotycząca sposobu losowania parametru zderzenia. Nie można bowiem zakładać, że wszystkie wartości parametru zderzenia są równie prawdopodobne. Istotnie, z założenia gęstość strumienia cząstek padających jest stała. Oznacza to, że jeśli wprowadzimy w płaszczyźnie prostopadłej układ współrzędnych kartezjańskich, to współrzędne te będą podlegały jednorodnemu rozkładowi prawdopodobieństwa. Dla parametru zderzenia dostaniemy  $b = \sqrt{x^2 + y^2}$ , gdzie liczby  $x$  i  $y$  mogą już być losowane za pomocą standardowego generatora (RND). Przy takiej procedurze nigdy nie uzyskamy jednak  $b$  większego od pewnego  $b_{max}$ . Ponieważ duże parametry zderzenia odpowiadają małym kątom rozproszenia, więc w zakresie małych kątów wyniki działania programu nie są wiarygodne. Należy się ich pozbyć rozważając jedynie kąty rozproszenia większe od pewnej wartości minimalnej  $\theta_{min}$ . Przy wartościach wolnych parametrów przyjętych w programie wybór  $\theta_{min} = 10^\circ \div 15^\circ$  daje poprawne rezultaty.

```
1210 IF (R00>10) THEN GOTO 1230
1220 FORCE(0)=RON1(0)/1000 : FORCE(1)=RON1(1)/1000
1230 RETURN
1240 REM
1250 REM procedura aktualizuje histogram
1260 IF (NTET=0) THEN RETURN
1270 KHG=INT(NBAR-RPC(NTET))
1280 LINE (NSTART+NTET*KWD,KHG)-(NSTART+(NTET+1)*KWD-1,KHG),1
1290 RETURN
1300 REM
1310 REM procedura przerysowuje histogram
1320 IF (LRTH>0) THEN GOTO 1360
1330 FOR II=0 TO NHIST-1
1340   RPC(II)=RPC(II)/2
1350 NEXT
1360 LINE (NSTART,NYW2+3)-(NEND,NBAR-1),0,BF
1370 FOR II=IMI TO NHIST-1
1380   IF (INT(RPC(II))=0) THEN GOTO 1410
1390   KCHW=NSTART+II*KWD
1400   LINE (KCHW,INT(NBAR-RPC(II)))-(KCHW+KWD-1,NBAR-1),1,BF
1410 NEXT
1420 RETURN
```

I TY ZOSTANIESZ  
RUTHERFORDEM...  
Atom Rutherforda  
Cząstka nr 289



F1 - konczy  
F2 - czysci okno  
F3 - krzywa teoretyczna

Wynik działania programu - kopia ekranu.



## Zadania

Redaguje Michał WOJCIECHOWSKI

**M 601.** Znaleźć liczby całkowite nieujemne spełniające równanie

$$(5 + 3\sqrt{2})^m = (3 + 5\sqrt{2})^n.$$

Rozwiązanie na str. 9

**M 602.** Przyjmijmy  $f(x) = x^2 - x + 1$ . Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej  $m > 1$  liczby  $m, f(m), f(f(m)), \dots$  są parami względnie pierwsze.

Rozwiązanie na str. 9

**M 603.** Znaleźć liczby całkowite spełniające równanie

$$\underbrace{\sqrt{x + \sqrt{x + \dots + \sqrt{x}}}}_{1991 \text{ razy}} = y.$$

Rozwiązanie na str. 9

Redaguje Jarosław KULPA

**F 308.** Oszacować długość włókna żarówki 100 W (220 V). Temperatura włókna podczas pracy wynosi około 2800 K. Dane dotyczące wolframu: opór właściwy w temperaturze  $0^\circ\text{C}$ :  $\rho = 4,9 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$ , współczynnik temperaturowy rezystancji:  $\alpha = 0,0048 \text{ K}^{-1}$ , emisyjność wolframu stanowi 40% emisyjności ciała doskonale czarnego.

Rozwiązanie na str. 7

**F 309.** Maksymalna prędkość pojazdu przy bezwietrznej pogodzie wynosi  $v_m = 100 \text{ km/h}$ . Jadąc pod wiatr kierowca nie mógł rozwinąć większej prędkości niż  $v = 90 \text{ km/h}$ . Oszacować prędkość wiatru. Opory toczenia należy pominąć.

Rozwiązanie na str. 7