Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Szczegółowy regulamin Klubu 44 zamieściliśmy w *Delcie* 7/1990, a jego skrót – we wszystkich numerach, w których są zadania ligowe (tj., tradycyjnie, z wyjątkiem numerów 6 i 7).

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 209 (WT=1,95) i 210 (WT=2,10) z numeru 9/1990

Konrad Plóro	– Warszawa	46,29
Mariusz Zając	– Pruszków	42,95
Tomasz Grzesiak	– Kraków	41,48
Paweł Kubit	– Krosno	39,68
Przemysław Gadziński	– Środa Śl.	37,34

Pan Plóro – po raz drugi.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 2/1991

Przypominamy treść zadań:

215. Wyznaczyć wszystkie takie punkty P leżące wewnątrz kwadratu $ABCD$, że

$$|\angle PAB| + |\angle PBC| + |\angle PCD| + |\angle PDA| = 180^\circ.$$

216. Udowodnić, że reszta z dzielenia liczby naturalnej n przez liczbę naturalną $k > 1$ równa się

$$\frac{k-1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k-1} \frac{\sin\frac{j}{k}(2n+1)\pi}{\sin\frac{j}{k}\pi}.$$

215. Przypuśćmy, że punkt P, nie należący do symetralnej żadnego boku kwadratu, spełnia podany warunek oraz że A jest wierzchołkiem kwadratu leżącym najbliżej punktu P. Niech Q będzie obrazem punktu P w symetrii osiowej względem symetralnej boków BC i DA. Mamy więc następujące równości kątów:

$$|\angle QAD| = |\angle PDA|, \quad |\angle QBC| = |\angle PCB| = 90^\circ - |\angle PCD|,$$

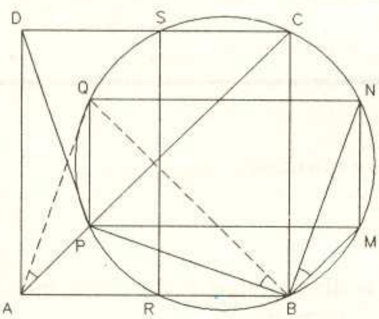
a stąd

$$|\angle PBQ| - |\angle PAQ| = (|\angle PBC| - |\angle QBC|) - (90^\circ - |\angle PAB| - |\angle QAD|) =$$
$$= |\angle PBC| - 90^\circ + |\angle PCD| - 90^\circ + |\angle PAB| + |\angle PDA| = 0^\circ.$$

Punkty B, C, P, Q leżą na okręgu przecinającym boki AB i CD odpowiednio w punktach R i S. Niech M i N będą wierzchołkami prostokąta $PMNQ$ wpisanego w ten okrąg. Wykazaliśmy przed chwilą, że kąty PAQ i PBQ są równe. Oznaczmy ich miarę przez φ. A zatem

$$|\angle PAQ| = |\angle PBQ| = |\angle PRQ| = |\angle MBN| = |\angle MRN| = \varphi.$$

Punkty B i R są jedynymi punktami półprostej $BA^{\rightarrow}$, z których odcinek MN jest widoczny pod kątem φ. Stąd (i z faktu, że $PMNQ$ jest prostokątem o boku PM równoległym do AB) wynika, że trójkąty MBN i MRN są odpowiednio przystające do PAQ i PBQ, przy czym trójkąt MBN jest obrazem trójkąta PAQ w translacji o wektor $\overrightarrow{AB}$. Tak więc $|PM| = |AB|$. Innymi słowy, prostokąt $PMNQ$ powstaje przez obrót o 90° prostokąta $SRBC$. Wobec tego $|\angle PCB| = |\angle PNB| = 45^\circ$, skąd wniosek, że P leży na przekątnej AC. Odrzucając założenie, że P leży najbliżej wierzchołka A, dochodzimy do konkluzji, iż P jest punktem jednej z przekątnych.



Na odwrót, każdy punkt leżący na dowolnej przekątnej kwadratu $ABCD$, bądź też na symetralnej dowolnego boku (sytuacja odrzucona na wstępie rozważań), spełnia podany warunek. Zatem szukanym miejscem geometrycznym jest suma zawartych w kwadracie odcinków czterech osi symetrii kwadratu.

216. Przyjmijmy oznaczenie

$$f(k,i,j) = \frac{\sin\frac{j}{k}(2i+1)\pi}{\sin\frac{j}{k}\pi}$$

$(k,\ i,\ j$ całkowite, j niepodzielne przez $k)$.

Niech r będzie resztą z dzielenia n przez k. Zadanie sprowadza się do wykazania, że

$$(1) \qquad \sum_{j=1}^{k-1} f(k,n,j) = k - 1 - 2r.$$

Zachodzą łatwe do sprawdzenia równości

$$f(k,n,j) = f(k,r,j),$$

$$f(k,0,j) = 1, \quad f(k,k-1,j) = -1.$$

Ponadto, jeśli żadna z liczb j, i nie dzieli się przez k, to

$$(2) \qquad f(k,i,j) - f(k,i-1,j) = f(k,j,i) - f(k,j-1,i)$$

(zarówno lewa, jak i prawa strona (2) równa się $2\cos(2ij\pi/k)$).

Korzystając z powyższych związków, przekształcamy lewą stronę dowodzonej równości (1) jak następuje:

$$\sum_{j=1}^{k-1} f(k,n,j) = \sum_{j=1}^{k-1} f(k,r,j) =$$
$$= \sum_{j=1}^{k-1}\Big(1 + \sum_{i=1}^{r}(f(k,i,j) - f(k,i-1,j))\Big) =$$
$$= k - 1 + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{k-1}(f(k,j,i) - f(k,j-1,i)) =$$
$$= k - 1 + \sum_{i=1}^{r}(f(k,k-1,i) - f(k,0,i)) =$$
$$= k - 1 - 2r.$$

Otrzymaliśmy prawą stronę (1). Dowód jest zakończony.

Redaguje Jerzy BROJAN

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 2/1991

Przypominamy treść zadań:

118. Akceleratory cząstek elementarnych są – jak wiadomo – urządzeniami wielkimi i kosztownymi. Opisany niżej (nieopatentowany!) wynalazek pozwala nadawać elektronom wielką energię znacznie taniej i prościej. Uderzamy w kulę bilardową kierując ją w stronę spoczywającej kuli o dwa razy mniejszej masie, tak, aby zderzenie było centralne (kule po zderzeniu biegną wzdłuż tej samej prostej). Kulą uderzona trafia z kolei w następną kulę jeszcze dwa razy lżejszą, itd., itd., ..., a na końcu znajduje się elektron. Ostatni stosunek mas będzie liczbą zawartą pomiędzy 1 a 2. Zakładając, że wszystkie zderzenia są centralne i doskonale sprężyste, oraz przyjmując masę kuli bilardowej 0,2 kg i jej prędkość początkową 1 m/s, oblicz numerycznie energię kinetyczną uzyskaną przez elektron (oczywiście, w ramach mechaniki relatywistycznej). Masa elektronu wynosi $9,11 \cdot 10^{-31}$ kg, prędkość światła $c = 2,9979 \cdot 10^{8}$ m/s.

114. W jednorodnym polu magnetycznym o indukcji wynoszącej początkowo 5 T i malejącej liniowo do zera w ciągu 0,4 s znajduje się prostopadła do pola pętla (obwód kołowy) o promieniu 10 cm, wykonana z przewodnika o oporze 0,1 Ω i wytrzymałości na rozerwanie 2 N. Czy pętla ulegnie rozerwaniu?

113. Stosując do pojedynczego zderzenia zasady zachowania pędu i energii kinetycznej otrzymujemy następujące równania:

$$p_1 = p_1' + p_2\,,$$

$$\sqrt{p_1^2 + M_1^2} + M_2 = \sqrt{p_1'^2 + M_1^2} + \sqrt{p_2^2 + M_2^2}\,,$$

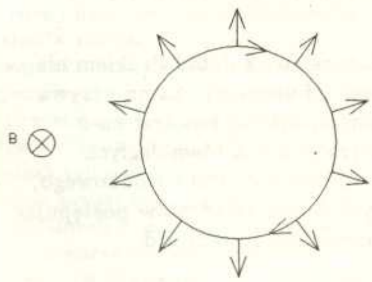
gdzie dużą literą M oznaczyliśmy iloczyn mc, a p_1 i p_1' są pędami pierwszej kuli przed i po zderzeniu, p_2 zaś jest pędem drugiej kuli po zderzeniu (przed zderzeniem kula ta spoczywa). Eliminując p_1' i przekształcając znajdujemy wyrażenie na p_2

$$p_2 = p_1 \left[1 + \frac{M_2^2 - M_1^2}{M_2^2 + M_1^2 + 2M_2\sqrt{p_1^2 + M_1^2}} \right]. \tag{1}$$

W szczególności w przybliżeniu nierelatywistycznym dostaniemy stąd $p_2 = p_1 \dfrac{2M_2}{M_2 + M_1}$, a w przybliżeniu ultrarelatywistycznym $p_2 = p_1 + \dfrac{M_2^2 - M_1^2}{2M_2}$.

W ogólnym przypadku iteracja wzoru (1) może być przeprowadzona prawdopodobnie tylko numerycznie. Podstawiając $M_{pocz} = 0,2\ \mathrm{kg}\cdot c = 5,9958 \cdot 10^{7}\ \mathrm{kg\cdot m/s}$, $M_{el} = m_{el} \cdot c = 2,73 \cdot 10^{-22}\ \mathrm{kg\cdot m/s}$ otrzymujemy tą metodą po 98 zderzeniach (z 97 kulami pośrednimi) końcową wartość pędu równą $8,180 \cdot 10^{-14}$ kg·m/s. Ponieważ elektron o takim pędzie jest ultrarelatywistyczny, więc energia kinetyczna wynosi $pc = 2,452 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{J} = 1,531 \cdot 10^{14}$ eV, co znacznie przekracza wartość energii nawet w największych PROJEKTOWANYCH akceleratorach.

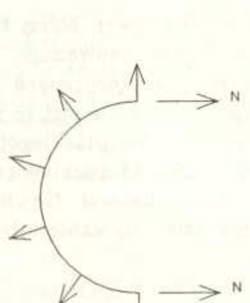
Uwaga: Ciąg kul o masach tworzących postęp geometryczny optymalizuje przekazywanie energii w przypadku, gdy zderzenia kul można uważać za nierelatywistyczne. Ogólnie nie jest to jednak prawda i znalezienie optymalnego ciągu mas stanowi nietrywialny problem.



114. Początkowy strumień pola przez pętlę wynosi $\Phi = B\pi r^2 = 0,157$ Wb, zatem siła elektromotoryczna indukcji jest równa $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = 0,393$ V, a natężenie prądu $I = \frac{\mathcal{E}}{R} = 3,93$ A. Zauważmy, że pole magnetyczne wytworzone przez ten prąd w środku pętli – przy założeniu, że przenikalność magnetyczna ośrodka jest bliska 1 – wynosi $B' = \frac{\mu_0 I}{2r} = 2,5 \cdot 10^{-5}$ T. Zatem jest znacznie mniejsze od pola zewnętrznego i efekty z nim związane (tzn. samoindukcję pętli) można zaniedbać.

Zwrot prądu I – zgodnie z regułą Lenza – będzie taki, aby podtrzymać malejące pole, a więc dla pola skierowanego za płaszczyznę rysunku – będzie prawoskrętny. Siły magnetyczne $\overrightarrow{\Delta F} = I\overrightarrow{\Delta l} \times \overrightarrow{B}$ działające na elementy pętli o długości Δl będą skierowane na zewnątrz i największe w chwili początkowej. Aby obliczyć naprężenie N pętli, rozpatrzmy siły działające na jedną jej połówkę. Sumując siły magnetyczne należy je zrzutować na oś poziomą i nietrudno wyliczyć, że $\Delta F_{poz} = I\Delta l_{pion} \cdot B$, czyli całkowita siła magnetyczna wynosi $F = I \cdot 2r \cdot B$. Siła ta jest równoważona przez dwie siły naprężenia N pętli (rysunek). Zatem

$$N = I \cdot r \cdot B = 1,96\,\mathrm{N}\,.$$



Jest to wielkość nieznacznie mniejsza od podanej wytrzymałości 2 N, zatem pętla nie powinna ulec rozerwaniu. Ponieważ zaniedbane efekty samoindukcji powodują pewne zmniejszenie natężenia prądu płynącego przez pętlę, więc ich uwzględnienie nie może zmienić końcowej konkluzji.