Przedstawiamy artykuł, w którym Autor pisze o problemach stanowiących ważny kierunek badawczy współczesnej matematyki. Podaje też twierdzenie, w którego dowodzie wykorzystany jest fragment jego niedawnej publikacji (z 1990 roku). Okazuje się, że i o aktualnych badaniach naukowych można pisać zrozumiale.

Redakcja

Inwolucje i symetrie

O PRZEKSZTAŁCENIACH, KTÓRE SĄ SWOIMI WŁASNYMI ODWROTNOŚCIAMI. PEWIEN NIE ROZWIĄZANY PROBLEM.

Jerzy JURKIEWICZ

Układ dwóch wielomianów dwóch zmiennych

$$(f(x,y), g(x,y))$$

określa przekształcenie płaszczyzny $\mathbf{R}^2$ w nią samą. Nazwiemy to przekształcenie inwolucją, jeżeli jest swoją własną odwrotnością, inaczej mówiąc

$$f(f(x,y), g(x,y)) = x \quad \text{oraz} \quad g(f(x,y), g(x,y)) = y\,.$$

Łatwo uogólnić pojęcie inwolucji tak, aby odnosiło się do przestrzeni trójwymiarowej.

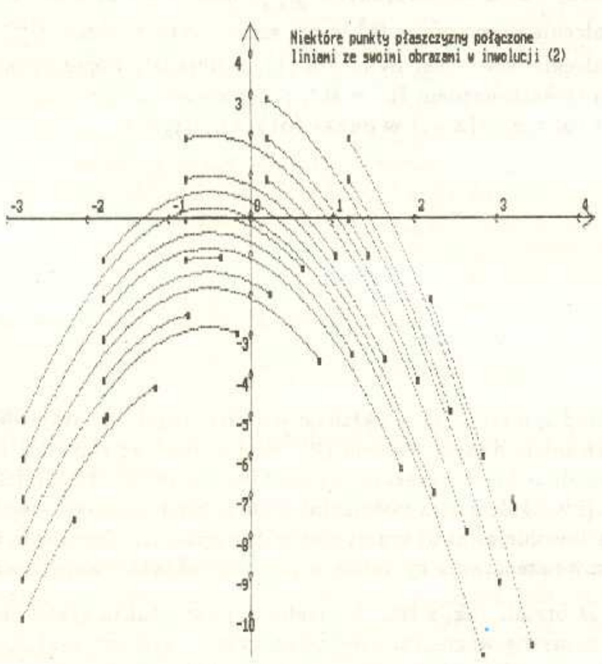
Przykładem inwolucji jest układ

(1) $$f(x,y) = y, \quad g(x,y) = x\,,$$

czyli symetria względem prostej $x = y$ i w ogóle każda symetria płaszczyzny. Ale nie są to jedyne inwolucje. Można, na przykład, łatwo sprawdzić, że układ wielomianów

(2) $$(y + x^2, x - (y + x^2)^2)$$

też jest inwolucją, chociaż nie jest symetrią.



Ale może jest to symetria przedstawiona w jakimś innym układzie współrzędnych? Wyjaśnimy to pojęcie. Powiemy, że wielomiany

(3) $$\begin{matrix} \alpha(x,y) \\ \beta(x,y) \end{matrix}$$

tworzą (algebraiczny, krzywoliniowy) układ współrzędnych na płaszczyźnie $\mathbf{R}^2$, jeżeli istnieją takie wielomiany $\gamma(x,y)$ i $\delta(x,y)$, że

$$\alpha(\gamma(x,y), \delta(x,y)) = x, \quad \beta(\gamma(x,y), \delta(x,y)) = y\,,$$
$$\gamma(\alpha(x,y), \beta(x,y)) = x, \quad \delta(\alpha(x,y), \beta(x,y)) = y\,.$$

O pewnym młodym matematyku

Nasz artykuł dotyczy pewnego wydarzenia z życia profesora Marka Kaca.

Marek (Mark) Kac urodził się w Krzemieńcu 16 sierpnia 1914 roku w rodzinie żydowskiej. Jego ojciec uzyskał doktorat z filozofii na Uniwersytecie Lipskim, a później ukończył jeszcze studia na Uniwersytecie Moskiewskim. Marek Kac rozpoczął naukę w domu, potem uczył się w szkole żydowskiej, by w 1925 roku wstąpić do Liceum Krzemienieckiego. Tam właśnie, przed maturą, napisał pracę stanowiącą temat naszego artykułu.

W latach 1931–35 studiował matematykę na Uniwersytecie Lwowskim. Już podczas studiów zaczął współpracować naukowo z Hugonem Steinhausem. Współpraca ta (dotycząca funkcji stochastycznych i ich zastosowań) trwała do 1938 roku (gdy Kac wyjechał na stypendium do USA) i (zdaniem samego Kaca) była decydująca dla jego dalszej kariery naukowej.

W USA młody doktor Kac kontynuował rozpoczęte w Polsce badania współpracując z wieloma wybitnymi matematykami (np. z van Kampenem, Erdösem, Wienerem). W 1939 roku został zatrudniony w Cornell University, gdzie przepracował 22 lata uzyskując liczące się w świecie wyniki na styku matematyki i różnych dyscyplin przyrodniczych (głównie fizyki) oraz technicznych. Później kierował wielu innymi placówkami naukowymi. Zmarł 26 października 1984 roku.

Delta miała szczęście zetknąć się z Markiem Kacem w 1979 roku, gdy bawił w Polsce z okazji przyznania mu przez Polskie Towarzystwo Fizyczne medalu imienia Smoluchowskiego. Wręczyliśmy mu wtedy kilka numerów naszego pisma. Szczęśliwym trafem było to przed jego bezsenną nocą – kiedy następnego dnia poprosiliśmy go o rozmowę, „był na bieżąco". *Delta* podobała mu się. W śpiewnej kresowej polszczyźnie oświadczył, że sam też chciałby w Stanach wydawać takie pismo, ale *tam nie znajdzie się takiego wariata, który dałby na to pieniądze.*

Kac w istocie mógłby wydawać takie pismo. Był bardzo interesującym popularyzatorem. Z jego prac na ten temat najbardziej znany jest esej *Czy można usłyszeć kształt bębna?*

We wspomnieniach *Enigmas of chance* Marek Kac opisuje wydarzenie, które spowodowało, że został matematykiem. Kiedy był uczniem szkoły średniej, program matematyki nie przewidywał rozwiązywania równań stopni wyższych niż dwa. Kac zainteresowany problemem zajrzał do podręcznika i w rozdziale dotyczącym równań stopnia trzeciego natrafił na rozwiązanie nie zawierające jednak ani słowa na temat, w jaki sposób się do niego dochodzi. Potraktował to jako wyzwanie i postanowił sam dotrzeć do wyprowadzenia wzorów.

Na rozwiązanie problemu poświęcił wakacje. Pracował ciężko i z wielkim napięciem, by uzyskać w końcu upragnione formuły. Tak pisze o tym we wspomnieniach:

> „W życiu wiele razy silnie angażowałem się emocjonalnie w rozwiązywanie problemów naukowych. Nigdy jednak nie pracowałem tak zapamiętale i gorączkowo, jak latem 1930 roku. Wstawałem wcześnie rano i prawie nie tracąc czasu na posiłki spędzałem całe dnie na zapisywaniu ryz papieru wzorami matematycznymi. Zaniedbałem zupełnie życie towarzyskie – przestałem widywać się z przyjaciółmi, nawet nie umawiałem się na randki. Zresztą i tak jakakolwiek rozmowa ze mną była pozbawiona sensu, bowiem odpowiadałem wyłącznie monosylabami.
>
> Pozbawiony strategii, zapalałem się do przypadkowych pomysłów, które często okazywały się daremnymi wysiłkami, prowadzącymi w ślepe uliczki."

Na początku roku szkolnego przedstawił nauczycielowi matematyki rękopis zawierający efekty pracy. Nauczyciel, po wnikliwym przeczytaniu, poradził mu wysłać manuskrypt do pisma *Młody Matematyk*. Po kilku miesiącach szkołę Kaca odwiedził wizytator Ministerstwa Wyznań Religijnych i Oświecenia Publicznego, Antoni Marian Rusiecki, będący również redaktorem naczelnym *Młodego Matematyka*. Kac dowiedział się wtedy, że redakcja postanowiła opublikować jego artykuł, ponieważ pomimo początkowego przekonania, iż jego metoda jest znana, bezowocne poszukiwania w literaturze doprowadziły do uznania jej za nową. W czasie rozmowy wizytator Rusiecki stwierdził, że Kac powinien studiować matematykę, gdyż niewątpliwie ma talent.

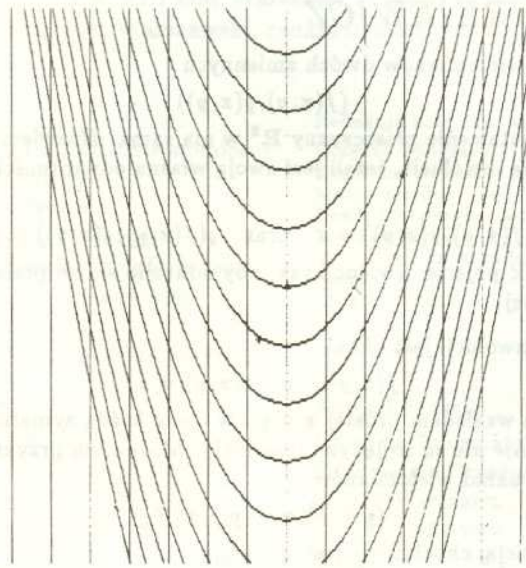
Wielomiany $\frac{\gamma(x,y)}{\delta(x,y)}$ tworzą także układ współrzędnych, jak mówimy, „odwrotny" do układu (3).

Zadanie 1. Sprawdzić, że

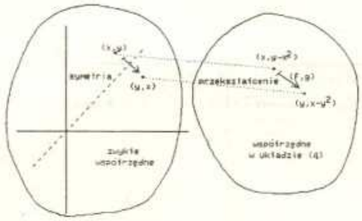
$$(4) \qquad \begin{matrix} x \\ y - x^2 \end{matrix}$$

jest układem współrzędnych na płaszczyźnie.

Współrzędnymi punktu $(2,3) \in \mathbf{R}^2$ w tym układzie są 2 i $3 - 2^2 = -1$. A oto jak wygląda „siatka współrzędnych" w tym układzie, to znaczy zbiory $\{x = n\}$ i $\{y - x^2 = m\}$, gdzie n i m przebiegają liczby całkowite.



Algebraiczny układ współrzędnych $\frac{\alpha(x,y)}{\beta(x,y)}$ można też uważać za przekształcenie płaszczyzny $\mathbf{R}^2$ w nią samą. Wtedy układ $\frac{\gamma(x,y)}{\delta(x,y)}$ stanowi przekształcenie odwrotne. Symetria (1), w układzie współrzędnych (3), staje się przekształceniem $\mathbf{R}^2$ w $\mathbf{R}^2$, przeprowadzającym dla dowolnych x i y punkt $(\alpha(x,y), \beta(x,y))$ w punkt $(\alpha(y,x), \beta(y,x))$.



Na przykład symetria (1) w układzie współrzędnych (4) staje się przekształceniem danym wzorem (2). Widać stąd, że symetria po zmianie układu współrzędnych przestaje na ogół być symetrią. Natomiast każda symetria (i w ogóle każda inwolucja) w dowolnym układzie współrzędnych pozostaje inwolucją. Stąd mamy naturalne pytanie: Czy każda inwolucja płaszczyzny przedstawia symetrię w pewnym układzie współrzędnych?

Odpowiedź brzmi: tak, z tym że trzeba dopuścić także symetrie względem punktu i symetrię względem całej płaszczyzny, czyli przekształcenie tożsamościowe. Natomiast dotychczas nie wiadomo, czy

(5) *każda inwolucja przestrzeni trójwymiarowej przedstawia symetrię (względem punktu, prostej, płaszczyzny lub całej przestrzeni) w pewnym algebraicznym układzie współrzędnych w* $\mathbf{R}^3$.

W każdej symetrii co najmniej jeden punkt pozostaje stały. Otóż okazuje się, że tę własność mają wszystkie inwolucje, co jest pewnym argumentem na korzyść hipotezy (5).

Zadania

2. Wykaż, że każde ciągłe przekształcenie prostej, które jest swoją własną odwrotnością, ma punkt stały na tej prostej.

3. Wykaż, że każda inwolucja prostej (zadana pojedynczym wielomianem jednej zmiennej) jest symetrią (lub tożsamością).
4. Wykaż, że każda inwolucja płaszczyzny wyrażona dwoma wielomianami stopnia pierwszego przedstawia symetrię w pewnym układzie współrzędnych.

Podam teraz dowód hipotezy (5) w przypadku, gdy inwolucja zadana jest wielomianami stopni ≤ 2. Wymiar przestrzeni, którą oznaczymy przez V, nie jest istotny. Dowód jest w zasadzie elementarny, wymaga jednak pewnej wprawy w posługiwaniu się przekształceniami wielomianowymi.

Skoro wiadomo, że inwolucja ma punkt stały, to możemy przyjąć, że jest nim początek układu współrzędnych. Inwolucję można wtedy zapisać w postaci $L+D$, gdzie w skład L wchodzą wyłącznie jednomiany stopnia 1, a w skład D jednomiany stopnia 2. Oznaczmy jeszcze przez I tożsamość na V. Z określenia inwolucji mamy

$$(L+D)\circ(L+D)=I.$$

(W dalszym ciągu symbol „$\circ$" oznaczający składanie przekształceń będziemy pomijać.) Wynika stąd, że $LL+LD+D(L+D)=I$ (uwaga: $L(L+D)=LL+LD$, ale $D(L+D)\neq DL+DD$; dlaczego?). Przyrównując jednomiany tego samego stopnia po obu stronach mamy

$$LL=I \quad \text{oraz} \quad LD=-D(L+D).$$

Lewa strona ostatniej równości składa się z jednomianów stopnia 2. Natomiast po prawej stronie, po rozwinięciu wszystkie jednomiany stopnia 2 dadzą w sumie $-DL$. Stąd $LD=-DL$ i $DL=D(L+D)$. Składając obie strony tej równości prawostronnie z L dostajemy $D= =D(I+DL)$. Dopisując do obu stron $(I+DL)$ mamy $D(I+DL)= =D(I+DL)(I+DL)=D(I+DL+DL(I+DL))=D(I+DL- -LD(I+DL))=D(I+DL-LD)=D(I+DL+DL)$ i ostatecznie $D=D(I+2DL)$. Postępując tak dalej dochodzimy do równości $D=D(I+m\,DL)$ dla dowolnej liczby naturalnej m. Rozważmy pomocniczo układ wielomianów $D-D(I+t\,DL)$ zmiennej t. Wszystkie liczby naturalne są pierwiastkami każdego z tych wielomianów! Ale wielomian (jednej zmiennej) nie może mieć nieskończenie wielu pierwiastków, chyba że jest zerowy. Wtedy każda liczba, w szczególności $t=1/2$, jest jego pierwiastkiem. Zatem $D=D(I+\frac{1}{2}DL)$. Chcemy użyć układu wielomianów $I+\frac{1}{2}DL$ jako układu współrzędnych. W tym celu wskażemy układ odwrotny: jest nim $I-\frac{1}{2}DL$. Istotnie, $(I-\frac{1}{2}DL)(I+\frac{1}{2}DL)=I+\frac{1}{2}DL-\frac{1}{2}DL(I+\frac{1}{2}DL)=I+\frac{1}{2}DL+ +\frac{1}{2}LD(I+\frac{1}{2}DL)=I+\frac{1}{2}DL+\frac{1}{2}LD=I+\frac{1}{2}DL-\frac{1}{2}DL=I$. Wybierając teraz $t=-1/2$ zamiast $t=1/2$ obliczamy w ten sam sposób, że również $(I+\frac{1}{2}DL)(I-\frac{1}{2}DL)=I$.

Podobne rozumowanie prowadzi do równości

$$(L+D)(I+\frac{1}{2}DL)=(I+\frac{1}{2}DL)L,$$

która oznacza
„Przekształcenie L staje się w układzie współrzędnych $I+\frac{1}{2}DL$ przekształceniem $L+D$".

Należy jeszcze, korzystając z tożsamości $LL=I$, znaleźć symetrię, która w pewnym układzie współrzędnych przyjmowałaby postać przekształcenia L. Niech V_1 oznacza podprzestrzeń punktów stałych w V względem przekształcenia L, a V_2 podprzestrzeń złożoną z takich punktów p, dla których $L(p)=-p$. Każdy punkt $p\in V$ można przedstawić jednoznacznie w postaci p_1+p_2, gdzie $p_1=\frac{1}{2}(p-L(p))\in V_1$, a $p_2= =\frac{1}{2}(p+L(p))\in V_2$ (jak mówimy, V jest sumą prostą V_1 i V_2). Niech k_1, k_2 oznaczają wymiary przestrzeni V_1 i V_2. Niech $f=(f_1,f_2,\ldots,f_{k_1})$ i $g=(g_1,g_2,\ldots,g_{k_2})$ będą dowolnymi układami współrzędnych w V_1 i V_2 odpowiednio. Wtedy przekształcenie $h:\mathbf{R}^{k_1+k_2}\to V$ przeprowadzające punkt $(x_1,\ldots,x_{k_1},y_1,\ldots,y_{k_2})$ w $f^{-1}(x_1,\ldots,x_{k_1})+g^{-1}(y_1,\ldots,y_{k_2})$ też jest układem współrzędnych, tym właśnie, którego szukamy. Natomiast potrzebna nam symetria w $\mathbf{R}^{k_1+k_2}$ będzie przekształcała każdy punkt $(x,y)=(x_1,\ldots,x_{k_1},y_1,\ldots,y_{k_2})$ w $(-x,y)=(-x_1,\ldots,-x_{k_1},y_1,\ldots,y_{k_2})$. Istotnie, przekształcenie L przeprowadza punkty $h(x,y)$ w $h(-x,y)$, czyli L przedstawia symetrię w układzie współrzędnych h, co kończy dowód twierdzenia.

W kilka miesięcy później w *Młodym Matematyku* ukazał się następujący artykuł.

Marek Katz (na życzenie autora redakcja *Młodego Matematyka* zastosowała taką wersję pisowni nazwiska)

O nowym sposobie rozwiązywania równań stopnia trzeciego

Chcąc rozwiązać równanie $x^3+ax^2+bx+ +c=0$, podstawiamy

$$x=z-\frac{1}{3}a$$

i otrzymujemy równanie, pozbawione drugiej potęgi niewiadomej:

(1) $$x^3+px+q=0,$$

gdzie p i q są wyrazami, zależnemi od a,b i c. Pragnę tu podać pewien – jak mi się wydaje – nowy sposób rozwiązywania równań typu (1).

Sposób mój polega na znalezieniu takich liczb A, B, m, n, aby przy każdej wartości x była spełniona równość

(2) $$x^3+px+q=A(x+m)^3-B(x+n)^3.$$

Wtedy otrzymamy równanie w postaci

(3) $$A(x+m)^3-B(x+n)^3=0$$

i łatwo je będzie rozwiązać; zauważmy bowiem, że lewa strona równania rozkłada się na czynniki:

$$\begin{aligned}A(x+m)^3-B(x+n)^3&=\\=\left[\sqrt[3]{A}(x+m)-\sqrt[3]{B}(x+n)\right]&\times\\\times\left[\sqrt[3]{A^2}(x+m)^2+\sqrt[3]{AB}(x+m)(x+n)+\right.&\\\left.+\sqrt[3]{B^2}(x+n)^2\right]&.\end{aligned}$$

Przyrównywając ten iloczyn do zera, mamy dwie możliwości:

(4) $$\sqrt[3]{A}(x+m)-\sqrt[3]{B}(x+n)=0,$$

(5) $$\sqrt[3]{A^2}(x+m)^2+\sqrt[3]{AB}(x+m)(x+n)+\sqrt[3]{B^2}(x+n)^2=0.$$

Jak widzimy, z równania (4) łatwo będzie znaleźć jeden z pierwiastków danego równania (1).

Zajmijmy się przeto znalezieniem liczb A, B, m i n. Rozwijając prawą stronę równości (2), otrzymamy:

$$\begin{aligned}x^3+px+q&=\\=(A-B)x^3+3(Am-Bn)x^2&+\\+3(Am^2-Bn^2)x+(Am^3-Bn^3)&.\end{aligned}$$

Jeżeli dwa wielomiany jednej zmiennej przybierają przy każdej wartości tej zmiennej równe wartości, to współczynniki