Nie jest to jednak w pełni zadowalające, bowiem najlepiej byłoby, gdyby ciąg $\{f_n\}$ był zbieżny jednostajnie do f na $\mathbf{R}_+$. Tak jednakże nie jest, bo biorąc ciąg $x_n = e^n$ i wstawiając do (2) x_n w miejsce x widzimy, że odstęp $f_n(x) - f(x)$ „ucieka" do nieskończoności na tym ciągu, ponieważ $f_n(x_n) - f(x_n) = n(e-2)$, a zatem $\lim_{n\to\infty} \left(f_n(x_n) - f(x_n)\right) = +\infty$. Tym samym tracimy i tutaj nadzieję na to najlepsze oszacowanie logarytmu. Niemniej jednak nie jest aż tak źle, bo oznaczając $g_n(x) = f_n(x) - f(x)$ mamy

$$g_n'(x) = \frac{1}{x}\left(x^{1/n} - 1\right),$$

skąd widać, że $g_n'(x) > 0$ dla $x > 1$ oraz $g_n'(x) < 0$ dla $x \in (0,1)$. Zatem, biorąc dowolnie ustalony przedział $I = [a,b] \subset \mathbf{R}_+$ widzimy, że funkcja g_n osiąga maksimum w którymś z końców tego przedziału, tzn.

$$\max_{x\in I} g_n(x) = \max\left\{g_n(a), g_n(b)\right\}.$$

Ponieważ jednak, jak pokazaliśmy wcześniej, $\lim_{n\to\infty} g_n(a) = \lim_{n\to\infty} g_n(b) = 0$, więc oznacza to, że na przedziale I ciąg funkcyjny $\{g_n\}$ jest zbieżny jednostajnie do zera, a więc ciąg funkcyjny $\{f_n\}$ jest na I zbieżny jednostajnie do funkcji f. Fakt ten wyrażamy mówiąc, że ciąg funkcyjny $f_n(x) = n\left(x^{1/n} - 1\right)$ jest zbieżny do funkcji $f(x) = \ln x$ niemal jednostajnie na $\mathbf{R}_+$. Praktyczny „wydźwięk" wypowiedzianego powyżej faktu jest następujący: funkcję $\ln x$ można dowolnie dobrze przybliżać funkcjami $n(x^{1/n} - 1)$ na każdym przedziale domkniętym i ograniczonym, zawartym w $\mathbf{R}_+$.

Jako ćwiczenie pozostawiamy Czytelnikowi sprawdzenie faktu, że dla dowolnego $x \in \mathbf{R}_+$ oraz dla dowolnego n naturalnego zachodzi $f_{n+1}(x) \le f_n(x)$. Oznacza to, że ciąg funkcyjny $\{f_n\}$ jest zbieżny do funkcji f w sposób monotonicznie malejący. Pozwala to jednocześnie wywnioskować zbieżność niemal jednostajną ciągu $\{f_n\}$ do funkcji f poprzez twierdzenie Diniego.

Zadania

M 598. Na okręgu o dane są dwa punkty A i B. Wskazać zbiór środków okręgów wpisanych w trójkąty ABC, gdy C przebiega okrąg o.
Rozwiązanie na str. 16

M 599. Na okręgu o dane są dwa punkty A i B. Wskazać zbiór środków ciężkości trójkątów ABC, gdy C przebiega okrąg o.
Rozwiązanie na str. 5

M 600. Na okręgu o dane są dwa punkty A i B. Wskazać zbiór ortocentrów (punktów przecięcia wysokości) trójkątów ABC, gdy C przebiega okrąg o.
Rozwiązanie na str. 17

Zadania matematyczne zostały zaczerpnięte z programu zajęć z geometrii na Trzyletnim Studium Zawodowym nauczycieli matematyki na Uniwersytecie Warszawskim.

Redaguje Jarosław KULPA

F 306. Oszacuj, o ile średnio Ziemia ma wyższą temperaturę w styczniu, gdy znajduje się w peryhelium, niż w lipcu, gdy znajduje się w aphelium. Załóż, że Ziemia jest ciałem doskonale szarym. Mimośród orbity ziemskiej wynosi $e = 0,0167$.
Rozwiązanie na str. 4

Ciało doskonale szare – – ciało, które zawsze pochłania ten sam ułamek padającego nań promieniowania, niezależnie od długości jego fali.

F 307. Pewien kraj chciał skonstruować działo kosmiczne mogące wystrzeliwać pociski z pierwszą prędkością kosmiczną. Oblicz, po jakim czasie spadłby na Ziemię pocisk wystrzelony z takiego działa pionowo do góry. Zaniedbaj opór powietrza.
Rozwiązanie na str. 13