

Z metodą Rungego-Kutty przez przestrzeń fazową

Ryszard KUTNER

Spośród wielu zagadnień fizyki, w których badaniu ważną rolę odgrywają metody numeryczne, na czoło wysuwa się problem ewolucji czasowej wybranych układów fizycznych. Mogą to być np. punkty materialne lub ich układy, płyny, ale także skomplikowane układy kwantowe. W artykule tym ograniczymy się do najprostszego przypadku – punktów materialnych. Wówczas ewolucja, czyli w tym przypadku po prostu ruch, jest rozwiązaniem układu N (tytuł, ile jest cząstek) równań, z których każde jest postaci

$$(1) \quad m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}_i \left(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \frac{d\vec{r}_1}{dt}, \dots, \frac{d\vec{r}_N}{dt}, t \right),$$

przy czym siły \vec{F}_i traktujemy jako dane funkcje położeń, prędkości i czasu. Do rozwiązania metodą numeryczną postać równań (1) nie jest zbyt wygodna – znacznie lepiej mieć do czynienia z równaniami rzędu pierwszego. Można to osiągnąć bardzo prosto, wprowadzając jako dodatkowe funkcje nieznanne pędy każdej z cząstek

$$(2) \quad \vec{p}_i = m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt},$$

za cenę podwojenia liczby równań. Rozpisując jeszcze położenia i pędy na składowe możemy zapisać tak otrzymany układ $6N$ równań w zwartej postaci

$$(3) \quad \frac{d}{dt} \underline{u}(t) = \underline{f}[\underline{u}(t), t],$$

gdzie użycie symboli podkreślonych oznacza, że chodzi nam o wektory o $k = 6N$ składowych (np. $\underline{u} = (r_{1x}, p_{1x}, r_{1y}, p_{1y}, \dots, r_{Nx}, p_{Nx})$).

Okazuje się, że opis układów fizycznych, w którym położenia i pędy występują na równych prawach, jako niezależne wielkości, jest użyteczny nie tylko przy numerycznym rozwiązywaniu równań ruchu. Co więcej, sformułowanie takie stoi u podstaw całych wielkich działów fizyki, takich jak fizyka statystyczna i mechanika kwantowa. Także w ramach mechaniki klasycznej formalny brak rozróżnienia między położeniem a pędem pozwala na wyprowadzenie zupełnie nowej metody rozwiązywania zagadnień dynamiki (jest to tzw. równanie Hamiltona-Jacobiego). Szczególną rolę w tych wszystkich rozważaniach odgrywa pojęcie przestrzeni fazowej. Jest to przestrzeń, której punktami są wszystkie możliwe stany układu sparametryzowane wartościami położeń i pędów. Jeżeli w pewnej chwili t_0 układ mechaniczny scharakteryzowany był pewnymi wartościami położeń i pędów (x_0, p_0) , to obrazem jego ruchu w przestrzeni fazowej jest krzywa przechodząca przez punkt o współrzędnych (x_0, p_0) . Krzywą taką nazywamy trajektorią fazową. Okazuje się, że trajektorie fazowe scharakteryzowane różnymi wartościami początkowymi (x_0, p_0) nie przecinają się. Jest to podstawowa zaleta opisu fazowego w porównaniu ze zwykłym, w którym śledzimy tylko zmiany położeń (nawiasem mówiąc, przestrzeń położeń nosi fachową nazwę przestrzeni konfiguracyjnej) – te same położenia mogą zostać osiągnięte tutaj przy różnych warunkach początkowych. Rozłączność trajektorii fazowych pozwala na ciekawą interpretację ruchu w przestrzeni fazowej jako przepływu pewnej hipotetycznej cieczy. Istotnie, każdy punkt przestrzeni fazowej możemy związać z pewnymi warunkami początkowymi dla naszego układu. Wraz z upływem czasu położenia punktów będą się zmieniać zgodnie z równaniami ruchu, jednak punkty – podobnie jak cząsteczki cieczy – zachowują zawsze swoją identyczność. A zatem jednoczesnemu ruchowi wszystkich możliwych kopii danego układu mechanicznego odpowiada przepływ „cieczy fazowej”. Taka ciecz, choć wielowymiarowa, zachowuje się analogicznie jak zwykła woda. Na przykład – jest ona nieściśliwa.

Wróćmy jednak do problemu numerycznego rozwiązania równania ewolucji (3) – nagrodą będzie możliwość bliższego zaznajomienia się z cieczą fazową. Jak zwykle w takich przypadkach, wprowadzimy szereg równo odległych węzłów czasowych i będziemy szukać algorytmu, pozwalającego wyznaczyć rozwiązanie $\underline{u}(t_{n+1})$ w węźle t_{n+1} korzystając ze znajomości rozwiązania $\underline{u}(t_n)$ w węźle poprzednim t_n .



```

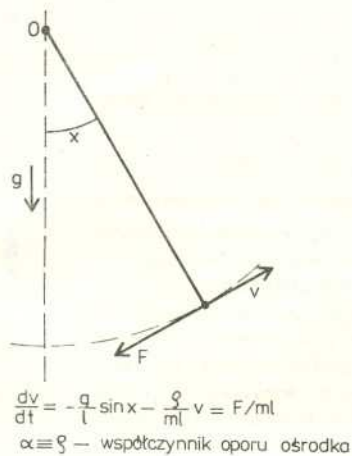
10 REM Program symuluje ruch
   punktu w przestrzeni
   fazy (zobacz)
20 DIM DIM METODA RUNGEGO-KUTTY
30 DIM X(1001) REM Potężność
40 DIM V(1001) REM prędkość
50 DIM dt - Czas
60 REM INT (tk, t) - Czas
70 LICZBA elementarny
80 ORZYMIECZ
90 F r0b
100 F r0b
110 F r0b
120 F r0b
130 F r0b
140 F r0b
150 F r0b
160 F r0b
170 F r0b
180 F r0b
190 F r0b
200 F r0b
210 F r0b
220 F r0b
230 F r0b
240 F r0b
250 F r0b
260 F r0b
270 F r0b
280 F r0b
290 F r0b
300 F r0b
310 F r0b
320 F r0b
330 F r0b
340 F r0b
350 F r0b
360 F r0b
370 F r0b
380 F r0b
390 F r0b
400 F r0b
410 F r0b
420 F r0b
430 F r0b
440 F r0b
450 F r0b
460 F r0b
470 F r0b
480 F r0b
490 F r0b
500 F r0b
510 F r0b
520 F r0b
530 F r0b
540 F r0b
550 F r0b
560 F r0b
570 F r0b
580 F r0b
590 F r0b
600 F r0b
610 F r0b
620 F r0b
630 F r0b
640 F r0b
650 F r0b
660 F r0b
670 F r0b
680 F r0b
690 F r0b
700 F r0b
710 F r0b
720 F r0b
730 F r0b
740 F r0b
750 F r0b
760 F r0b
770 F r0b
780 F r0b
790 F r0b
800 F r0b
810 F r0b
820 F r0b
830 F r0b
840 F r0b
850 F r0b
860 F r0b
870 F r0b
880 F r0b
890 F r0b
900 F r0b
910 F r0b
920 F r0b
930 F r0b
940 F r0b
950 F r0b
960 F r0b
970 F r0b
980 F r0b
990 F r0b
1000 F r0b
1001 F r0b
1002 F r0b
1003 F r0b
1004 F r0b
1005 F r0b
1006 F r0b
1007 F r0b
1008 F r0b
1009 F r0b
1010 F r0b
1011 F r0b
1012 F r0b
1013 F r0b
1014 F r0b
1015 F r0b
1016 F r0b
1017 F r0b
1018 F r0b
1019 F r0b
1020 F r0b
1021 F r0b
1022 F r0b
1023 F r0b
1024 F r0b
1025 F r0b
1026 F r0b
1027 F r0b
1028 F r0b
1029 F r0b
1030 F r0b
1031 F r0b
1032 F r0b
1033 F r0b
1034 F r0b
1035 F r0b
1036 F r0b
1037 F r0b
1038 F r0b
1039 F r0b
1040 F r0b
1041 F r0b
1042 F r0b
1043 F r0b
1044 F r0b
1045 F r0b
1046 F r0b
1047 F r0b
1048 F r0b
1049 F r0b
1050 F r0b
1051 F r0b
1052 F r0b
1053 F r0b
1054 F r0b
1055 F r0b
1056 F r0b
1057 F r0b
1058 F r0b
1059 F r0b
1060 F r0b
1061 F r0b
1062 F r0b
1063 F r0b
1064 F r0b
1065 F r0b
1066 F r0b
1067 F r0b
1068 F r0b
1069 F r0b
1070 F r0b
1071 F r0b
1072 F r0b
1073 F r0b
1074 F r0b
1075 F r0b
1076 F r0b
1077 F r0b
1078 F r0b
1079 F r0b
1080 F r0b
1081 F r0b
1082 F r0b
1083 F r0b
1084 F r0b
1085 F r0b
1086 F r0b
1087 F r0b
1088 F r0b
1089 F r0b
1090 F r0b
1091 F r0b
1092 F r0b
1093 F r0b
1094 F r0b
1095 F r0b
1096 F r0b
1097 F r0b
1098 F r0b
1099 F r0b
1100 F r0b
1101 F r0b
1102 F r0b
1103 F r0b
1104 F r0b
1105 F r0b
1106 F r0b
1107 F r0b
1108 F r0b
1109 F r0b
1110 F r0b
1111 F r0b
1112 F r0b
1113 F r0b
1114 F r0b
1115 F r0b
1116 F r0b
1117 F r0b
1118 F r0b
1119 F r0b
1120 F r0b
1121 F r0b
1122 F r0b
1123 F r0b
1124 F r0b
1125 F r0b
1126 F r0b
1127 F r0b
1128 F r0b
1129 F r0b
1130 F r0b
1131 F r0b
1132 F r0b
1133 F r0b
1134 F r0b
1135 F r0b
1136 F r0b
1137 F r0b
1138 F r0b
1139 F r0b
1140 F r0b
1141 F r0b
1142 F r0b
1143 F r0b
1144 F r0b
1145 F r0b
1146 F r0b
1147 F r0b
1148 F r0b
1149 F r0b
1150 F r0b
1151 F r0b
1152 F r0b
1153 F r0b
1154 F r0b
1155 F r0b
1156 F r0b
1157 F r0b
1158 F r0b
1159 F r0b
1160 F r0b
1161 F r0b
1162 F r0b
1163 F r0b
1164 F r0b
1165 F r0b
1166 F r0b
1167 F r0b
1168 F r0b
1169 F r0b
1170 F r0b
1171 F r0b
1172 F r0b
1173 F r0b
1174 F r0b
1175 F r0b
1176 F r0b
1177 F r0b
1178 F r0b
1179 F r0b
1180 F r0b
1181 F r0b
1182 F r0b
1183 F r0b
1184 F r0b
1185 F r0b
1186 F r0b
1187 F r0b
1188 F r0b
1189 F r0b
1190 F r0b
1191 F r0b
1192 F r0b
1193 F r0b
1194 F r0b
1195 F r0b
1196 F r0b
1197 F r0b
1198 F r0b
1199 F r0b
1200 F r0b
1201 F r0b
1202 F r0b
1203 F r0b
1204 F r0b
1205 F r0b
1206 F r0b
1207 F r0b
1208 F r0b
1209 F r0b
1210 F r0b
1211 F r0b
1212 F r0b
1213 F r0b
1214 F r0b
1215 F r0b
1216 F r0b
1217 F r0b
1218 F r0b
1219 F r0b
1220 F r0b
1221 F r0b
1222 F r0b
1223 F r0b
1224 F r0b
1225 F r0b
1226 F r0b
1227 F r0b
1228 F r0b
1229 F r0b
1230 F r0b
1231 F r0b
1232 F r0b
1233 F r0b
1234 F r0b
1235 F r0b
1236 F r0b
1237 F r0b
1238 F r0b
1239 F r0b
1240 F r0b
1241 F r0b
1242 F r0b
1243 F r0b
1244 F r0b
1245 F r0b
1246 F r0b
1247 F r0b
1248 F r0b
1249 F r0b
1250 F r0b
1251 F r0b
1252 F r0b
1253 F r0b
1254 F r0b
1255 F r0b
1256 F r0b
1257 F r0b
1258 F r0b
1259 F r0b
1260 F r0b
1261 F r0b
1262 F r0b
1263 F r0b
1264 F r0b
1265 F r0b
1266 F r0b
1267 F r0b
1268 F r0b
1269 F r0b
1270 F r0b
1271 F r0b
1272 F r0b
1273 F r0b
1274 F r0b
1275 F r0b
1276 F r0b
1277 F r0b
1278 F r0b
1279 F r0b
1280 F r0b
1281 F r0b
1282 F r0b
1283 F r0b
1284 F r0b
1285 F r0b
1286 F r0b
1287 F r0b
1288 F r0b
1289 F r0b
1290 F r0b
1291 F r0b
1292 F r0b
1293 F r0b
1294 F r0b
1295 F r0b
1296 F r0b
1297 F r0b
1298 F r0b
1299 F r0b
1300 F r0b
1301 F r0b
1302 F r0b
1303 F r0b
1304 F r0b
1305 F r0b
1306 F r0b
1307 F r0b
1308 F r0b
1309 F r0b
1310 F r0b
1311 F r0b
1312 F r0b
1313 F r0b
1314 F r0b
1315 F r0b
1316 F r0b
1317 F r0b
1318 F r0b
1319 F r0b
1320 F r0b
1321 F r0b
1322 F r0b
1323 F r0b
1324 F r0b
1325 F r0b
1326 F r0b
1327 F r0b
1328 F r0b
1329 F r0b
1330 F r0b
1331 F r0b
1332 F r0b
1333 F r0b
1334 F r0b
1335 F r0b
1336 F r0b
1337 F r0b
1338 F r0b
1339 F r0b
1340 F r0b
1341 F r0b
1342 F r0b
1343 F r0b
1344 F r0b
1345 F r0b
1346 F r0b
1347 F r0b
1348 F r0b
1349 F r0b
1350 F r0b
1351 F r0b
1352 F r0b
1353 F r0b
1354 F r0b
1355 F r0b
1356 F r0b
1357 F r0b
1358 F r0b
1359 F r0b
1360 F r0b
1361 F r0b
1362 F r0b
1363 F r0b
1364 F r0b
1365 F r0b
1366 F r0b
1367 F r0b
1368 F r0b
1369 F r0b
1370 F r0b
1371 F r0b
1372 F r0b
1373 F r0b
1374 F r0b
1375 F r0b
1376 F r0b
1377 F r0b
1378 F r0b
1379 F r0b
1380 F r0b
1381 F r0b
1382 F r0b
1383 F r0b
1384 F r0b
1385 F r0b
1386 F r0b
1387 F r0b
1388 F r0b
1389 F r0b
1390 F r0b
1391 F r0b
1392 F r0b
1393 F r0b
1394 F r0b
1395 F r0b
1396 F r0b
1397 F r0b
1398 F r0b
1399 F r0b
1400 F r0b
1401 F r0b
1402 F r0b
1403 F r0b
1404 F r0b
1405 F r0b
1406 F r0b
1407 F r0b
1408 F r0b
1409 F r0b
1410 F r0b
1411 F r0b
1412 F r0b
1413 F r0b
1414 F r0b
1415 F r0b
1416 F r0b
1417 F r0b
1418 F r0b
1419 F r0b
1420 F r0b
1421 F r0b
1422 F r0b
1423 F r0b
1424 F r0b
1425 F r0b
1426 F r0b
1427 F r0b
1428 F r0b
1429 F r0b
1430 F r0b
1431 F r0b
1432 F r0b
1433 F r0b
1434 F r0b
1435 F r0b
1436 F r0b
1437 F r0b
1438 F r0b
1439 F r0b
1440 F r0b
1441 F r0b
1442 F r0b
1443 F r0b
1444 F r0b
1445 F r0b
1446 F r0b
1447 F r0b
1448 F r0b
1449 F r0b
1450 F r0b
1451 F r0b
1452 F r0b
1453 F r0b
1454 F r0b
1455 F r0b
1456 F r0b
1457 F r0b
1458 F r0b
1459 F r0b
1460 F r0b
1461 F r0b
1462 F r0b
1463 F r0b
1464 F r0b
1465 F r0b
1466 F r0b
1467 F r0b
1468 F r0b
1469 F r0b
1470 F r0b
1471 F r0b
1472 F r0b
1473 F r0b
1474 F r0b
1475 F r0b
1476 F r0b
1477 F r0b
1478 F r0b
1479 F r0b
1480 F r0b
1481 F r0b
1482 F r0b
1483 F r0b
1484 F r0b
1485 F r0b
1486 F r0b
1487 F r0b
1488 F r0b
1489 F r0b
1490 F r0b
1491 F r0b
1492 F r0b
1493 F r0b
1494 F r0b
1495 F r0b
1496 F r0b
1497 F r0b
1498 F r0b
1499 F r0b
1500 F r0b
1501 F r0b
1502 F r0b
1503 F r0b
1504 F r0b
1505 F r0b
1506 F r0b
1507 F r0b
1508 F r0b
1509 F r0b
1510 F r0b
1511 F r0b
1512 F r0b
1513 F r0b
1514 F r0b
1515 F r0b
1516 F r0b
1517 F r0b
1518 F r0b
1519 F r0b
1520 F r0b
1521 F r0b
1522 F r0b
1523 F r0b
1524 F r0b
1525 F r0b
1526 F r0b
1527 F r0b
1528 F r0b
1529 F r0b
1530 F r0b
1531 F r0b
1532 F r0b
1533 F r0b
1534 F r0b
1535 F r0b
1536 F r0b
1537 F r0b
1538 F r0b
1539 F r0b
1540 F r0b
1541 F r0b
1542 F r0b
1543 F r0b
1544 F r0b
1545 F r0b
1546 F r0b
1547 F r0b
1548 F r0b
1549 F r0b
1550 F r0b
1551 F r0b
1552 F r0b
1553 F r0b
1554 F r0b
1555 F r0b
1556 F r0b
1557 F r0b
1558 F r0b
1559 F r0b
1560 F r0b
1561 F r0b
1562 F r0b
1563 F r0b
1564 F r0b
1565 F r0b
1566 F r0b
1567 F r0b
1568 F r0b
1569 F r0b
1570 F r0b
1571 F r0b
1572 F r0b
1573 F r0b
1574 F r0b
1575 F r0b
1576 F r0b
1577 F r0b
1578 F r0b
1579 F r0b
1580 F r0b
1581 F r0b
1582 F r0b
1583 F r0b
1584 F r0b
1585 F r0b
1586 F r0b
1587 F r0b
1588 F r0b
1589 F r0b
1590 F r0b
1591 F r0b
1592 F r0b
1593 F r0b
1594 F r0b
1595 F r0b
1596 F r0b
1597 F r0b
1598 F r0b
1599 F r0b
1600 F r0b
1601 F r0b
1602 F r0b
1603 F r0b
1604 F r0b
1605 F r0b
1606 F r0b
1607 F r0b
1608 F r0b
1609 F r0b
1610 F r0b
1611 F r0b
1612 F r0b
1613 F r0b
1614 F r0b
1615 F r0b
1616 F r0b
1617 F r0b
1618 F r0b
1619 F r0b
1620 F r0b
1621 F r0b
1622 F r0b
1623 F r0b
1624 F r0b
1625 F r0b
1626 F r0b
1627 F r0b
1628 F r0b
1629 F r0b
1630 F r0b
1631 F r0b
1632 F r0b
1633 F r0b
1634 F r0b
1635 F r0b
1636 F r0b
1637 F r0b
1638 F r0b
1639 F r0b
1640 F r0b
1641 F r0b
1642 F r0b
1643 F r0b
1644 F r0b
1645 F r0b
1646 F r0b
1647 F r0b
1648 F r0b
1649 F r0b
1650 F r0b
1651 F r0b
1652 F r0b
1653 F r0b
1654 F r0b
1655 F r0b
1656 F r0b
1657 F r0b
1658 F r0b
1659 F r0b
1660 F r0b
1661 F r0b
1662 F r0b
1663 F r0b
1664 F r0b
1665 F r0b
1666 F r0b
1667 F r0b
1668 F r0b
1669 F r0b
1670 F r0b
1671 F r0b
1672 F r0b
1673 F r0b
1674 F r0b
1675 F r0b
1676 F r0b
1677 F r0b
1678 F r0b
1679 F r0b
1680 F r0b
1681 F r0b
1682 F r0b
1683 F r0b
1684 F r0b
1685 F r0b
1686 F r0b
1687 F r0b
1688 F r0b
1689 F r0b
1690 F r0b
1691 F r0b
1692 F r0b
1693 F r0b
1694 F r0b
1695 F r0b
1696 F r0b
1697 F r0b
1698 F r0b
1699 F r0b
1700 F r0b
1701 F r0b
1702 F r0b
1703 F r0b
1704 F r0b
1705 F r0b
1706 F r0b
1707 F r0b
1708 F r0b
1709 F r0b
1710 F r0b
1711 F r0b
1712 F r0b
1713 F r0b
1714 F r0b
1715 F r0b
1716 F r0b
1717 F r0b
1718 F r0b
1719 F r0b
1720 F r0b
1721 F r0b
1722 F r0b
1723 F r0b
1724 F r0b
1725 F r0b
1726 F r0b
1727 F r0b
1728 F r0b
1729 F r0b
1730 F r0b
1731 F r0b
1732 F r0b
1733 F r0b
1734 F r0b
1735 F r0b
1736 F r0b
1737 F r0b
1738 F r0b
1739 F r0b
1740 F r0b
1741 F r0b
1742 F r0b
1743 F r0b
1744 F r0b
1745 F r0b
1746 F r0b
1747 F r0b
1748 F r0b
1749 F r0b
1750 F r0b
1751 F r0b
1752 F r0b
1753 F r0b
1754 F r0b
1755 F r0b
1756 F r0b
1757 F r0b
1758 F r0b
1759 F r0b
1760 F r0b
1761 F r0b
1762 F r0b
1763 F r0b
1764 F r0b
1765 F r0b
1766 F r0b
1767 F r0b
1768 F r0b
1769 F r0b
1770 F r0b
1771 F r0b
1772 F r0b
1773 F r0b
1774 F r0b
1775 F r0b
1776 F r0b
1777 F r0b
1778 F r0b
1779 F r0b
1780 F r0b
1781 F r0b
1782 F r0b
1783 F r0b
1784 F r0b
1785 F r0b
1786 F r0b
1787 F r0b
1788 F r0b
1789 F r0b
1790 F r0b
1791 F r0b
1792 F r0b
1793 F r0b
1794 F r0b
1795 F r0b
1796 F r0b
1797 F r0b
1798 F r0b
1799 F r0b
1800 F r0b
1801 F r0b
1802 F r0b
1803 F r0b
1804 F r0b
1805 F r0b
1806 F r0b
1807 F r0b
1808 F r0b
1809 F r0b
1810 F r0b
1811 F r0b
1812 F r0b
1813 F r0b
1814 F r0b
1815 F r0b
1816 F r0b
1817 F r0b
1818 F r0b
1819 F r0b
1820 F r0b
1821 F r0b
1822 F r0b
1823 F r0b
1824 F r0b
1825 F r0b
1826 F r0b
1827 F r0b
1828 F r0b
1829 F r0b
1830 F r0b
1831 F r0b
1832 F r0b
1833 F r0b
1834 F r0b
1835 F r0b
1836 F r0b
1837 F r0b
1838 F r0b
1839 F r0b
1840 F r0b
1841 F r0b
1842 F r0b
1843 F r0b
1844 F r0b
1845 F r0b
1846 F r0b
1847 F r0b
1848 F r0b
1849 F r0b
1850 F r0b
1851 F r0b
1852 F r0b
1853 F r0b
1854 F r0b
1855 F r0b
1856 F r0b
1857 F r0b
1858 F r0b
1859 F r0b
1860 F r0b
1861 F r0b
1862 F r0b
1863 F r0b
1864 F r0b
1865 F r0b
1866 F r0b
1867 F r0b
1868 F r0b
1869 F r0b
1870 F r0b
1871 F r0b
1872 F r0b
1873 F r0b
1874 F r0b
1875 F r0b
1876 F r0b
1877 F r0b
1878 F r0b
1879 F r0b
1880 F r0b
1881 F r0b
1882 F r0b
1883 F r0b
1884 F r0b
1885 F r0b
1886 F r0b
1887 F r0b
1888 F r0b
1889 F r0b
1890 F r0b
1891 F r0b
1892 F r0b
1893 F r0b
1894 F r0b
1895 F r0b
1896 F r0b
1897 F r0b
1898 F r0b
1899 F r0b
1900 F r0b
1901 F r0b
1902 F r0b
1903 F r0b
1904 F r0b
1905 F r0b
1906 F r0b
1907 F r0b
1908 F r0b
1909 F r0b
1910 F r0b
1911 F r0b
1912 F r0b
1913 F r0b
1914 F r0b
1915 F r0b
1916 F r0b
1917 F r0b
1918 F r0b
1919 F r0b
1920 F r0b
1921 F r0b
1922 F r0b
1923 F r0b
1924 F r0b
1925 F r0b
1926 F r0b
1927 F r0b
1928 F r0b
1929 F r0b
1930 F r0b
1931 F r0b
1932 F r0b
1933 F r0b
1934 F r0b
1935 F r0b
1936 F r0b
1937 F r0b
1938 F r0b
1939 F r0b
1940 F r0b
1941 F r0b
1942 F r0b
1943 F r0b
1944 F r0b
1945 F r0b
1946 F r0b
1947 F r0b
1948 F r0b
1949 F r0b
1950 F r0b
1951 F r0b
1952 F r0b
1953 F r0b
1954 F r0b
1955 F r0b
1956 F r0b
1957 F r0b
1958 F r0b
1959 F r0b
1960 F r0b
1961 F r0b
1962 F r0b
1963 F r0b
1964 F r0b
1965 F r0b
1966 F r0b
1967 F r0b
1968 F r0b
1969 F r0b
1970 F r0b
1971 F r0b
1972 F r0b
1973 F r0b
1974 F r0b
1975 F r0b
1976 F r0b
1977 F r0b
1978 F r0b
1979 F r0b
1980 F r0b
1981 F r0b
1982 F r0b
1983 F r0b
1984 F r0b
1985 F r0b
1986 F r0b
1987 F r0b
1988 F r0b
1989 F r0b
1990 F r0b
1991 F r0b
1992 F r0b
1993 F r0b
1994 F r0b
1995 F r0b
1996 F r0b
1997 F r0b
1998 F r0b
1999 F r0b
2000 F r0b
2001 F r0b
2002 F r0b
2003 F r0b
2004 F r0b
2005 F r0b
2006 F r0b
2007 F r0b
2008 F r0b
2009 F r0b
2010 F r0b
2011 F r0b
2012 F r0b
2013 F r0b
2014 F r0b
2015 F r0b
2016 F r0b
2017 F r0b
2018 F r0b
2019 F r0b
2020 F r0b
2021 F r0b
2022 F r0b
2023 F r0b
2024 F r0b
2025 F r0b
2026 F r0b
2027 F r0b
2028 F r0b
2029 F r0b
2030 F r0b
2031 F r0b
2032 F r0b
2033 F r0b
2034 F r0b
2035 F r0b
2036 F r0b
2037 F r0b
2038 F r0b
2039 F r0b
2040 F r0b
2041 F r0b
2042 F r0b
2043 F r0b
2044 F r0b
2045 F r0b
2046 F r0b
2047 F r0b
2048 F r0b
2049 F r0b
2050 F r0b
2051 F r0b
2052 F r0b
2053 F r0b
2054 F r0b
2055 F r0b
2056 F r0b
2057 F r0b
2058 F r0b
2059 F r0b
2060 F r0b
2061 F r0b
2062 F r0b
2063 F r0b
2064 F r0b
2065 F r0b
2066 F r0b
2067 F r0b
2068 F r0b
2069 F r0b
2070 F r0b
2071 F r0b
2072 F r0b
2073 F r0b
2074 F r0b
2075 F r0b
2076 F r0b
2077 F r0b
2078 F r0b
2079 F r0b
2080 F r0b
2081 F r0b
2082 F r0b
2083 F r0b
2084 F r0b
2085 F r0b
2086 F r0b
```




Na pierwszy rzut oka jest to dość łatwe. Ponieważ $\frac{d}{dt} \underline{u}(t_n) \simeq \frac{\Delta \underline{u}(t_{n+1})}{\Delta t} = \frac{\underline{u}(t_{n+1}) - \underline{u}(t_n)}{\Delta t}$,
więc

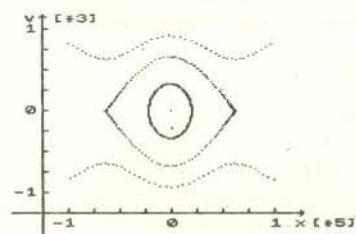
$$(4) \quad \underline{u}(t_{n+1}) \simeq f[\underline{u}(t_n), t_n] \Delta t + \underline{u}(t_n).$$

Niestety, takie proste rozwiązanie prowadzi do nieprzewidzianych kłopotów. Przy używaniu elementarnych algorytmów, takich jak opisany powyżej, obserwować można niefizyczny efekt samoczynnego numerycznego „studzenia się” lub „grzania”, co prowadzi do niestabilnego zachowania się układu przekreślając wiarygodność stosowanej metody. Efekt ten polega na tym, że całkowita energia układu maleje lub rośnie bez jakichkolwiek fizycznych przyczyn – sama z siebie. Powodem takiego niefizycznego zachowania się są kumulujące się błędy procedury numerycznej (szerzej zostało to opisane w książce D. Pottera *Metody obliczeniowe fizyki – fizyka komputerowa*, PWN, Warszawa 1982). Zwykle, aby temu zaradzić, w pierwszym odruchu zmniejszamy krok czasowy. Prowadzi to jednak do spowolnienia metody, a wspomniane efekty nadal się pojawiają, tyle że nieco później. Nie tędy więc droga. Należy raczej użyć bardziej wyrafinowanego algorytmu obarczonego mniejszym błędem i stabilnego ze względu na ten błąd. Algorytmem spełniającym te wymagania jest tzw. metoda Rungego–Kutty. Jej zwykłe wyprowadzenie jest dość zawiłe. Można ją jednak również otrzymać różnicując równanie różniczkowe (3) na trzy różne sposoby, a następnie – traktując każdy z nich jako równoprawny – uśrednić względem tych sposobów (patrz tekst w ramce na str. 8). Rezultatem jest w pełni profesjonalny algorytm o bardzo małym błędzie (rzędu $(\Delta t)^5$), stosowany z powodzeniem do rozwiązywania skomplikowanych zagadnień ewolucji. My jednak nie będziemy tak ambitni i zadowolimy się analizą przypadku najprostszego – jednowymiarowego ruchu pojedynczego punktu materialnego. Naszym wzorcowym układem będzie wahadło matematyczne (rys. 1). Aby jeszcze bardziej uprościć sobie życie, przyjmijmy, że masa punktu jest jednostkowa. Wówczas $p = v$ i mamy $\underline{u}(t) = [x(t), v(t)]$,



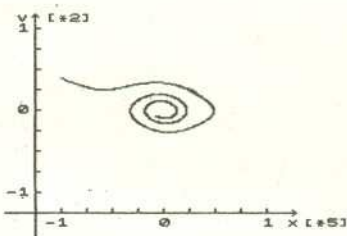
Rys. 1

$f[\underline{u}(t); t] = \{v(t), F(x(t), v(t); t)\}$. Załączony program komputerowy znajduje trajektorie fazowe dla tego prostego układu. Został on napisany w BASICu na mikrokomputerze ZX Spektrum 48 K (lub jemu pokrewne, jak Timex czy Elwro 800 Junior), a ze względu na jego prostotę można go także bez trudu przepisać na inne, popularne w kraju mikrokomputery. Po uruchomieniu program zapytuje o początkowe wartości położenia i prędkości oraz o czynniki skalujące poziomą oś x -ów i pionową oś v (zostają one następnie wydrukowane na wykresie – patrz rysunek 2 i 3). Po obliczeniu trajektorii fazowej pytanie o warunki początkowe zostaje ponowione (czynników skali zmieniać już wtedy nie można).



Rys. 2

Rysunki 2 i 3 ilustrują wynik działania programu dla zagadnienia wahadła matematycznego, odpowiednio przy braku tłumienia i z uwzględnieniem siły tłumiącej – patrz rysunek 1. Otrzymany wzór przypomina nieco dywan, a nieco ścieżkę wirów powstającą za przeszkodą w płynącej wodzie (szczególnie rysunek 2). Górny „szlaczek” na rysunku 2, podobnie jak i dolny, to tzw. przypadek rotacyjny (zachodzący tylko wtedy, gdy $k = \frac{E_0}{\omega} > 1$, gdzie częstość $\omega = \sqrt{g/l}$), gdy wahadło wiruje wokół swojego punktu zawieszenia 0. Spoczynkowi wahadła odpowiada po prostu kropka zaznaczona na wykresie w punkcie (0,0). Następnie elipsa odpowiada przypadkowi oscylacyjnemu ($k < 1$). Wreszcie przypadek graniczny ($k = 1$) niezwykle trudny do wysymulowania, odpowiadający zatrzymaniu się wahadła w pozycji pionowej ($x = \pi$). Trudność numeryczna polega na tym, iż wahadło w swoim ruchu ma się zatrzymać dokładnie w zenicie i w takiej pozycji pozostać. Jednakże nawet najmniejszy błąd numeryczny (związany np. ze skończoną długością przedziału czasowego Δt) wytrąca je prędzej czy później z tego stanu. (Nieźłym przybliżeniem jest przyjęcie przedziału czasowego $\Delta t = 0, 1$.)



Rys. 3

Proponujemy Czytelnikowi odtworzenie tych rysunków. Aby to umożliwić, jak również, by otworzyć drogę do własnych eksperymentów, potrzeba jeszcze kilku słów o strukturze programu. W linii 140 zdefiniowano siłę F , a w linii 100 przyjęto parametry ją charakteryzujące. Zasadniczy algorytm zawarty jest w (wydzielonej) pętli rozpoczynającej się w linii 290, a kończącej się w linii 540. Zidentyfikowanie metody Rungego–Kutty nie powinno tu stanowić problemu. Inne podstawowe parametry, charakteryzujące samą symulację, to elementarny przedział czasu Δt ($\equiv \Delta t$) ustalony w linii 160 oraz całkowity czas symulacji t_k (linia 170).

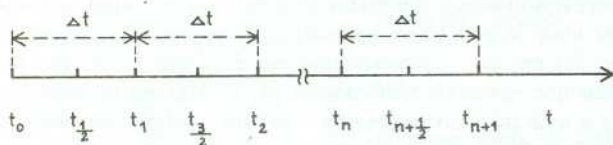
A zatem wszystko jest już gotowe do wyprawy w przestrzeń fazową. Szczęśliwej podróży!



Chcemy rozwiązać równanie różniczkowe zwyczajne pierwszego rzędu

$$\frac{d}{dt}u(t) = f[u(t), t].$$

W pierwszym kroku przybliżymy pochodną względem czasu $\frac{d}{dt}u(t)$ przez iloraz $\frac{\Delta u(t)}{\Delta t} \approx \frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{\Delta t}$, gdzie indeks $n = 0, 1, 2, \dots$, numeruje kolejne (w tym przypadku) równo odległe węzły czasowe, tak jak to pokazuje poniższy rysunek.



Będziemy poszukiwać rozwiązania właśnie w tych (głównych) węzłach czasowych. Kłopot jednak w tym, że iloraz $\frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{\Delta t}$ wyznacza pewną funkcję (prędkość) w połowie przedziału czasowego, czyli w węźle pomocniczym $t_{n+(1/2)}$. A zatem możemy wypisać następujące przybliżone równości:

$$\frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{\Delta t} \approx \frac{1}{2} \{f[u(t_n), t_n] + f[u(t_{n+1}), t_{n+1}]\},$$

$$\frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{\Delta t} \approx f[u(t_{n+(1/2)}), t_{n+(1/2)}],$$

$$\frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{\Delta t} \approx f\left[\frac{u(t_n) + u(t_{n+1})}{2}, t_{n+(1/2)}\right].$$

Stanowią one równoprawne różnicowe wersje naszego wyjściowego równania różniczkowego. I nie ma nic zaskakującego w tym, że wiele różnych obrazów różnicowych przybliża jedno i to samo równanie różniczkowe. Do tego trzeba się po prostu przyzwyczaić. Przypomnijmy, że celem naszym jest sbudowanie algorytmu, który wyznacza rozwiązanie $u(t_{n+1})$ w następnym węźle czasowym t_{n+1} korzystając ze znajomości rozwiązania $u(t_n)$ w węźle poprzednim t_n . Narzuca się jednak pytanie: w jaki sposób poradzić sobie z prawymi stronami powyższych równań, skoro występuje tam zarówno poszukiwane rozwiązanie $u(t_{n+1})$ w węźle następnym, jak też nieznanne rozwiązanie $u(t_{n+(1/2)})$ w pomocniczym węźle czasowym? Aby rozwiązać ten problem, wprowadźmy następujące pomocnicze wielkości:

$$k_1 = f[u(t_n), t_n],$$

$$k_2 = f[u(t_{n+(1/2)}), t_{n+(1/2)}],$$

$$k_3 = f\left[\frac{u(t_n) + u(t_{n+1})}{2}, t_{n+(1/2)}\right],$$

$$k_4 = f[u(t_{n+1}), t_{n+1}],$$

z których, jak widać, jedynie k_1 możemy od razu wyznaczyć. Pozostałe będziemy teraz mozolnie obliczać. Po pierwsze, możemy napisać w przybliżeniu:

$$u(t_{n+(1/2)}) = u\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}\right) \approx u(t_n) + \frac{\Delta t}{2} f[u(t_n), t_n],$$

a co za tym idzie,

$$k_2 = f\left[u(t_n) + \frac{\Delta t}{2} k_1, t_n + \frac{\Delta t}{2}\right].$$

Tym samym wielkość tę potrafimy już obliczyć, gdyż wiemy, jak funkcja f zależy od swoich argumentów.

W dalszym ciągu zauważmy, że

$$k_3 = f\left[u(t_n) + \frac{1}{2} \Delta t k_2, t_n + \frac{\Delta t}{2}\right]$$

(kto nie wierzy, niech podstawí tutaj zamiast k_2 po prostu iloraz $\frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{\Delta t}$). I wreszcie

$$k_4 = f[u(t_n) + \Delta t k_3, t_n + \Delta t]$$

(co widać po podstawieniu, podobnie jak i poprzednio w miejsce k_3 ilorazu $\frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{\Delta t}$). Podsumujmy pracę, jaką wykonaliśmy dotychczas i zastanówmy się, które spośród trzech wyjściowych równań będziemy w dalszym ciągu eksploatować? Odpowiedź jest prosta: wszystkie trzy, gdyż są jednakowo dobre. Jak to praktycznie robić? Ależ to proste – dodajmy je wszystkie i podzielmy przez ich liczbę, czyli, jak to się mówi, uśrednijmy po wszystkich możliwych sposobach (sytuacjach). W wyniku takiego postępowania otrzymujemy gotowy algorytm postaci:

$$u(t_{n+1}) = u(t_n) + \frac{1}{6} \Delta t (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad n = 0, 1, \dots,$$

gdzie $k_j, j = 1, \dots, 4$, zostały już obliczone powyżej. Proszę zauważyć, że za pomocą tego algorytmu możemy znaleźć poszukiwane rozwiązanie w następnym węźle czasowym korzystając tylko ze znajomości rozwiązania w węźle poprzedzającym. Startując więc ze znanego warunku początkowego $u(t_0)$ możemy teraz kolejno, krok po kroku, wyznaczyć rozwiązanie w chwili t_1 , $u(t_1)$, a stąd w chwili t_2 mamy $u(t_2)$, po czym $u(t_3)$ w chwili t_3 , itd. Osiągnęliśmy zatem postawiony cel.

Dla zagadnienia jednowymiarowego ruchu punktu materialnego o masie m pod wpływem działania siły $F(x, v; t)$ należy w równaniu (3) przyjąć $u(t) = [x(t), v(t)]$ oraz $f[u(t); t] = \left\{v(t), \frac{F[x(t), v(t); t]}{m}\right\}$. Pomocnicze funkcje $k_j, j = 1, \dots, 4$, konieczne przy zastosowaniu metody Rungego-Kutty, przyjmą postać:

$$k_1 = (k_1^x, k_1^v), \quad \text{gdzie}$$

$$k_1^x = v(t_n),$$

$$k_1^v = \frac{F[x(t_n), v(t_n); t_n]}{m},$$

$$k_2 = (k_2^x, k_2^v), \quad \text{gdzie}$$

$$k_2^x = v(t_n) + \frac{1}{2} \Delta t k_1^v,$$

$$k_2^v = \frac{F\left[x(t_n) + \frac{1}{2} \Delta t k_1^x, v(t_n) + \frac{1}{2} \Delta t k_1^v, t_n + \frac{\Delta t}{2}\right]}{m}$$

$$k_3 = (k_3^x, k_3^v), \quad \text{gdzie}$$

$$k_3^x = v(t_n) + \frac{1}{2} \Delta t k_2^v,$$

$$k_3^v = \frac{F\left[x(t_n) + \frac{1}{2} \Delta t k_2^x, v(t_n) + \frac{1}{2} \Delta t k_2^v, t_n + \frac{\Delta t}{2}\right]}{m}$$

$$k_4 = (k_4^x, k_4^v), \quad \text{gdzie}$$

$$k_4^x = v(t_n) + \Delta t k_3^v,$$

$$k_4^v = \frac{F\left[x(t_n) + \Delta t k_3^x, v(t_n) + \Delta t k_3^v, t_n + \Delta t\right]}{m}.$$