Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 7/1990.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 207 (WT=1,23) i 208 (WT=3,16) z numeru 8/1990

Kazimierz Serbin	– Sanok	44,59
Mariusz Zając	– Pruszków	42,95
Konrad Plóro	– Warszawa	42,84
Paweł Kubit	– Krosno	39,68
Tomasz Grzesiak	– Kraków	37,64

Po niedługim milczeniu (ostatnie notowanie w numerze 1/1991) wrócił do nas pan Serbin, aby zamknąć trzeci cykl „44", zostając dziesiątym Weteranem matematycznego Klubu 44.

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VIII 1991

Zadania z matematyki nr 221, 222

Redaguje Marcin E. KUCZMA

221. Ograniczony zbiór wypukły (płaski lub przestrzenny) nazywamy *ściśle wypukłym*, jeśli jego brzeg nie zawiera żadnego odcinka dodatniej długości.
(a) W ściśle wypukły środkowo-symetryczny zbiór na płaszczyźnie wpisano wielokąt, również środkowo-symetryczny. Dowieść, że środki symetrii obu figur pokrywają się.
(b) Dać przykład ściśle wypukłego środkowo-symetrycznego zbioru w przestrzeni oraz wpisanego weń środkowo-symetrycznego wielościanu (nie zdegenerowanego do wielokąta) tak, by środki symetrii obu figur nie pokrywały się.

222. Wyznaczyć wszystkie co najwyżej dwucyfrowe (w układzie dziesiętnym) liczby n o następującej własności: dla dowolnej liczby naturalnej m, której ostatnią cyfrą jest jedynka, dwucyfrowa końcówka liczby n^m jest identyczna z n. (Uwaga: $3 = 03$ itp.)
Zadanie **222** zaproponował pan Mirosław Matlęga ze Skoczowa.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 1/1991

Przypominamy treść zadań:

213. Czy dla każdej pary funkcji różniczkowalnych $f,\ g$: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ istnieje funkcja różniczkowalna h: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ taka, że $h' = f'g'$?

214. Obliczyć sumę $\sum |A\cup B|$, w której sumowanie przebiega po wszystkich parach uporządkowanych (A,B) podzbiorów zbioru $\{1,\ldots,n\}$.

213. Odpowiedź: nie. Przykład: weźmy pod uwagę funkcje

$$u(x) = \begin{cases} \cos\frac{1}{x} & \text{dla } x\neq 0,\\ 0 & \text{dla } x = 0,\end{cases}\qquad v(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & \text{dla } x\neq 0,\\ 0 & \text{dla } x = 0,\end{cases}$$

$$w(x) = xv(x) \quad \text{dla} \quad x\in\mathbf{R}$$

i zauważmy, że

$$w'(x) = 2v(x) - u(x) \quad \text{dla} \quad x\in\mathbf{R}.$$

Funkcja v, jako ciągła, posiada pierwotną; z ostatniej równości wynika więc, że u ma pierwotną: $u = f'$ na $\mathbf{R}$.
Przypuśćmy teraz, że dla pewnej funkcji różniczkowalnej h: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ zachodzi równość $h' = f'\cdot f' = u^2$ na $\mathbf{R}$. Przyjmijmy $k(x) = h(x) - f(x/2)$. Wówczas

$$k'(x) = u(x)^2 - \frac{1}{2}u\left(\frac{x}{2}\right) = \begin{cases} (\cos\frac{1}{x})^2 - \frac{1}{2}\cos\frac{2}{x} = \frac{1}{2} & \text{dla } x\neq 0,\\ 0 & \text{dla } x = 0.\end{cases}$$

Wynikałoby stąd, że funkcja $l(x) = k(x) - \frac{x}{2}$ jest stała na przedziałach $(-\infty;0)$ i $(0;\infty)$; musiałaby więc (wobec ciągłości) być funkcją stałą na $\mathbf{R}$ – wbrew temu, że $l'(0) = -1/2$. Zatem h nie istnieje.

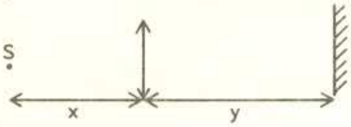
214. Ustalmy liczbę naturalną $k\leq n$ i wybierzmy k-elementowy podzbiór K zbioru $\{1,\ldots,n\}$; można to uczynić na $\binom{n}{k}$ sposobów. Ile jest par zbiorów A, B takich, że $A\cup B = K$? Każdy element zbioru K może należeć albo tylko do A, albo tylko do B, albo i tu, i tu. Przyporządkowanie każdemu z k elementów zbioru K jednej z tych trzech możliwości wyznacza przedstawienie K w postaci sumy $A\cup B$. Jest więc 3^k takich par (A,B). To zaś pokazuje, że w danej do obliczenia sumie jest $\binom{n}{k}3^k$ składników równych k. Suma ta (oznaczmy ją przez s) równa się zatem

$$s = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}3^k.$$

Aby ją „zwinąć", różniczkujemy stronami tożsamość

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$$

i w otrzymanej równości podstawiamy $x = 3$. Po krótkim przekształceniu dostajemy wynik: $s = 3n\cdot 4^{n-1}$.



119. Źródło punktowe S o światłości I znajduje się w odległości x od soczewki skupiającej o ogniskowej f, za którą w odległości y leży ekran prostopadły do osi optycznej (rysunek). Znaleźć natężenie oświetlenia powierzchni ekranu (jej oświetlonej części). Rozważyć przypadki:
a) obraz pozorny ($x < f$),
b) obraz rzeczywisty przed ekranem,
c) obraz rzeczywisty za ekranem.
Należy pominąć straty światła przy przejściu przez soczewkę i przyjąć, że jej rozmiary są małe w porównaniu z x, y i f.

120. Dana jest gęstość cieczy ρ, jej napięcie powierzchniowe σ i masa kropli m. Oznaczmy przez ω_m maksymalną prędkość kątową, jaką można nadać tej kropli w powietrzu w stanie nieważkości, aby nie rozleciała się.
a) Wykazać, że ω_m jest proporcjonalna do $\sqrt{\frac{\sigma}{m}}$ i nie zależy od ρ.
b) Obliczyć lub co najmniej ocenić stałą proporcjonalności w powyższej zależności.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 1/1991

Przypominamy treść zadań:

111. W odległości l od leżącej na ziemi piłki znajduje się płot o wysokości h. Jaką minimalną prędkość trzeba nadać piłce, aby mogła przelecieć ponad płotem?

112. Opisz wady obrazu dyfrakcyjnego wynikające z następujących wad siatki dyfrakcyjnej.
a) Rysy nierówno odległe. Rozważ przypadek, gdy na przemian występuje nieco większa i nieco mniejsza odległość, ewentualnie także przypadek, gdy co trzecia odległość jest nieco inna od dwóch poprzednich.
b) Rysy nierówno głębokie. Rozważ podobne przypadki, jak poprzednio.
Czy istnieje doświadczalna możliwość rozróżnienia, która z ewentualności a) i b) jest przyczyną obserwowanej wady obrazu?

111. Niech α będzie kątem nachylenia prędkości początkowej do poziomu. Czas lotu piłki do płotu wynosi $t = \frac{l}{v\cos\alpha}$, a osiągnięta po tym czasie wysokość

$$y = vt\sin\alpha - \frac{gt^2}{2} = l\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{gl^2}{2v^2\cos^2\alpha}.$$

Szukamy maksimum tej wielkości, jako funkcji kąta α

$$0 = \frac{dy}{d\alpha} = \frac{l}{\cos^2\alpha} - \frac{gl^2\sin\alpha}{v^2\cos^3\alpha},$$

skąd $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{v^2}{gl}$. Podstawienie daje wartość y

$$y_{max} = \frac{v^2}{g} - \frac{gl^2}{2v^2}\left(1 + \frac{v^4}{g^2l^2}\right) = \frac{v^2}{2g} - \frac{gl^2}{2v^2}.$$

Przyrównując y_{max} do h znajdujemy v

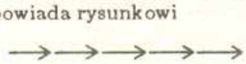
$$v = \sqrt{g(h + \sqrt{h^2 + l^2})}.$$

Uwaga: Zadanie jest dość proste i można je znaleźć w niektórych zbiorach zadań. Niestety, na ogół z błędnym rozwiązaniem (zakłada się, że piłka przelatuje nad płotem w wierzchołku paraboli).

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 109 (WT=2,28) i 110 (WT=3,03)
z numeru 10/1990

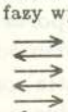
Leszek Motyka	– Kraków	41,45
Paweł Perkowski	– Szczecin	25,82
Dzierżysław Lipniacki	– Lublin	25,46
Adam Sikorski	– Lublin	17,05

112. Posługuję się metodą graficzną, w której drgania harmoniczne są reprezentowane jako wektory na płaszczyźnie xy, o długości równej amplitudzie drgań i nachylone do osi x pod kątem równym fazie. Rysunki przedstawiają wypadkową amplitudę fali ugiętej w określonym kierunku, uzyskaną przez złożenie fal ugiętych na poszczególnych rysach. Dla siatki bez wad maksimum odpowiada rysunkowi



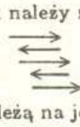
Gdy odległości rys są na przemian (nieco) różne, rysunek wygląda tak

(zmiana odległości rys prowadzi do zmiany faz składowych). Najistotniejsza jest jednak nie zmiana **tego** rysunku, lecz to, że w połowie odległości między prążkami, tam gdzie dla siatki bez wad kolejne przesunięcia fazy wynosiły π i interferencja była destruktywna



dla siatki o nierównych odległościach wystąpi niezerowa amplituda wypadkowa

Zatem w środku między rzędami widma wystąpią dodatkowe, słabsze prążki. (Gdy co trzecia odległość jest inna, wystąpią dwa dodatkowe prążki.)
Dla siatki z niejednakową głębokością rys (czyli niejednakową amplitudą fal cząstkowych) wygląda to niemal tak samo, przy czym ostatni rysunek należy zastąpić takim:



(Strzałki w zasadzie leżą na jednej linii, przesunięcie ich w dół służy większej czytelności rysunku.) Zakłócenie obrazu będzie więc identyczne, jak poprzednio, ALE teraz faza dodatkowych prążków jest taka sama, jak zasadniczych, a poprzednio była przesunięta o $\frac{\pi}{2}$. Zatem przypadki a) i b) można rozróżnić poddając interferencji światło z różnych prążków – takie doświadczenie jest czułe na fazę.