Jak lepiej oszacować logarytm naturalny?

Józef BANAŚ

Bardzo wygodną sytuacją w wielu zastosowaniach jest możliwość rozwinięcia pewnej funkcji w szereg potęgowy, zwany szeregiem Taylora tej funkcji. Zastanówmy się, jak rozwinąć w taki szereg niezwykle ważną funkcję, jaką jest logarytm naturalny, tzn. funkcję $f(x) = \ln x$. Wiedząc, że $\ln x$ jest całką funkcji $1/x$, wystarczy w tym celu rozwinąć najpierw w szereg potęgowy tę funkcję. Robimy to bardzo prosto. Mianowicie

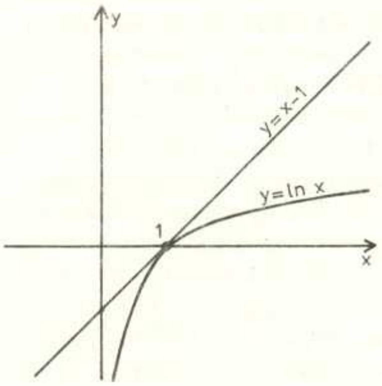
$$\frac{1}{x} = \frac{1}{1-(1-x)} = 1 + (1-x) + (1-x)^2 + (1-x)^3 + \ldots$$

Jest to szereg geometryczny o ilorazie równym $1 - x$, zatem szereg ten jest zbieżny bezwzględnie dla $|1 - x| < 1$, tzn. w przedziale $(0, 2)$. Całkując w tym przedziale powyższy szereg otrzymujemy

$$\ln x + C = x - \frac{(1-x)^2}{2} - \frac{(1-x)^3}{3} - \frac{(1-x)^4}{4} - \ldots$$

Aby wyliczyć stałą całkowania C, najwygodniej będzie podstawić $x = 1$. Wtedy otrzymujemy $C = 1$. Zatem ostatecznie

$$\ln x = -(1-x) - \frac{(1-x)^2}{2} - \frac{(1-x)^3}{3} - \frac{(1-x)^4}{4} \ldots$$



Oczywiście, wzór ten jest prawdziwy tylko dla $x \in (0, 2)$, co też nie w pełni nas zadowala. Tracimy więc szansę na przybliżanie logarytmu wielomianem na półosi $(0, \infty) = \mathbf{R}_+$.

Spróbujmy teraz pójść inną drogą. Z elementarnego kursu rachunku różniczkowego znana jest następująca nierówność

(1) $$\ln x \le x - 1,$$

która jest prawdziwa dla wszystkich dopuszczalnych x, a więc dla $x \in \mathbf{R}_+$. Wykres prawej strony tej nierówności to po prostu styczna $y = x - 1$ do wykresu funkcji $f(x) = \ln x$ w punkcie $(1, 0)$ (por. rysunek).

Przypomnijmy, że nierówność (1) najprościej udowodnić w następujący sposób. Weźmy funkcję $g(x) = x - 1 - \ln x$, dla $x \in \mathbf{R}_+$. Oczywiście, $g(1) = 0$. Dalej mamy: $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$, skąd widać, że $g'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$ oraz $g'(x) < 1 \Leftrightarrow x \in (0, 1)$. Zatem funkcja g maleje na przedziale $(0, 1)$ i rośnie na przedziale $(1, \infty)$, co oznacza, że w punkcie $x = 1$ osiąga ona minimum globalne równe 0. Stąd $g(x) \ge 0$ dla $x \in \mathbf{R}_+$, a to oznacza, że spełniona jest nierówność (1).

Jeżeli chcielibyśmy posłużyć się funkcją $x - 1$ jako przybliżeniem funkcji $\ln x$, to już z rysunku widać, że to przybliżenie jest dobre tylko dla x „bliskich" liczby 1, bowiem dla x dążących do nieskończoności lub do zera „rozstęp" między $x - 1$ oraz $\ln x$ wzrasta nieograniczenie. Można to sprawdzić bezpośrednim rachunkiem. Istotnie, poprzez proste zastosowanie reguły de l'Hospitala mamy, że $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, więc $\lim_{x\to\infty} (x - 1 - \ln x) = \lim_{x\to\infty} x\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$.

Powstaje więc pytanie: Czy nie można funkcji $\ln x$ przybliżać lepiej w inny sposób? Okazuje się, że tak i w tym celu wystarczy posłużyć się właśnie małą modyfikacją nierówności (1). Weźmy bowiem dowolnie ustaloną liczbę naturalną n i w miejsce x w nierówności (1) podstawmy $x^{1/n}$. Wtedy, wykorzystując tylko twierdzenie o logarytmowaniu potęgi otrzymamy

(2) $$\ln x \le n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right)$$

dla każdego $x \in \mathbf{R}_+$ oraz dla każdego $n = 1, 2, \ldots$ Czy oszacowanie podyktowane nierównością (2) jest istotnie lepsze? Aby odpowiedzieć na to pytanie, rozważmy na $\mathbf{R}_+$ ciąg funkcyjny $f_n(x) = n\left(x^{1/n} - 1\right)$. Potraktujmy x jako ustalone i obliczmy granicę ciągu liczbowego $\{f_n(x)\}$. W tym celu zauważmy, że wystarczy umieć obliczyć granicę $\lim_{a\to+\infty} a\left(x^{1/a} - 1\right)$. Zapisując ją w postaci $\lim_{a\to+\infty} \frac{x^{1/a}-1}{\frac{1}{a}}$ (symbol nieoznaczony $\frac{0}{0}$) widać, że znowu pomoże nam twierdzenie de l'Hospitala. Mamy bowiem $\lim_{a\to+\infty} \frac{(x^{1/a}-1)'}{(\frac{1}{a})'} = \lim_{a\to+\infty} \frac{x^{1/a}(-1/a^2)\ln x}{-1/a^2} = \ln x$ (tutaj a jest zmienną!). Stąd wnioskujemy, że $\lim_{a\to+\infty} a\left(x^{1/a} - 1\right) = \ln x$, a więc także $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \ln x$ dla każdego $x > 0$. Fakt ten wyrażamy mówiąc, że ciąg funkcyjny $\{f_n\}$ jest zbieżny punktowo do funkcji $f(x)$ (czyli $\ln x$) na zbiorze $\mathbf{R}_+$.

Nie jest to jednak w pełni zadowalające, bowiem najlepiej byłoby, gdyby ciąg $\{f_n\}$ był zbieżny jednostajnie do f na $\mathbf{R}_+$. Tak jednakże nie jest, bo biorąc ciąg $x_n = e^n$ i wstawiając do (2) x_n w miejsce x widzimy, że odstęp $f_n(x) - f(x)$ „ucieka” do nieskończoności na tym ciągu, ponieważ $f_n(x_n) - f(x_n) = n(e-2)$, a zatem $\lim\limits_{n\to\infty} \left(f_n(x_n) - f(x_n)\right) = +\infty$. Tym samym tracimy i tutaj nadzieję na to najlepsze oszacowanie logarytmu. Niemniej jednak nie jest aż tak źle, bo oznaczając $g_n(x) = f_n(x) - f(x)$ mamy

$$g_n'(x) = \frac{1}{x}\left(x^{1/n} - 1\right),$$

skąd widać, że $g_n'(x) > 0$ dla $x > 1$ oraz $g_n'(x) < 0$ dla $x \in (0,1)$. Zatem, biorąc dowolnie ustalony przedział $I = [a,b] \subset \mathbf{R}_+$ widzimy, że funkcja g_n osiąga maksimum w którymś z końców tego przedziału, tzn.

$$\max_{x\in I} g_n(x) = \max\left\{g_n(a), g_n(b)\right\}.$$

Ponieważ jednak, jak pokazaliśmy wcześniej, $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(a) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(b) = 0$, więc oznacza to, że na przedziale I ciąg funkcyjny $\{g_n\}$ jest zbieżny jednostajnie do zera, a więc ciąg funkcyjny $\{f_n\}$ jest na I zbieżny jednostajnie do funkcji f. Fakt ten wyrażamy mówiąc, że ciąg funkcyjny $f_n(x) = n\left(x^{1/n} - 1\right)$ jest zbieżny do funkcji $f(x) = \ln x$ niemal jednostajnie na $\mathbf{R}_+$. Praktyczny „wydźwięk” wypowiedzianego powyżej faktu jest następujący: funkcję $\ln x$ można dowolnie dobrze przybliżać funkcjami $n(x^{1/n} - 1)$ na każdym przedziale domkniętym i ograniczonym, zawartym w $\mathbf{R}_+$.

Jako ćwiczenie pozostawiamy Czytelnikowi sprawdzenie faktu, że dla dowolnego $x \in \mathbf{R}_+$ oraz dla dowolnego n naturalnego zachodzi $f_{n+1}(x) \le f_n(x)$. Oznacza to, że ciąg funkcyjny $\{f_n\}$ jest zbieżny do funkcji f w sposób monotonicznie malejący. Pozwala to jednocześnie wywnioskować zbieżność niemal jednostajną ciągu $\{f_n\}$ do funkcji f poprzez twierdzenie Diniego.

Zadania

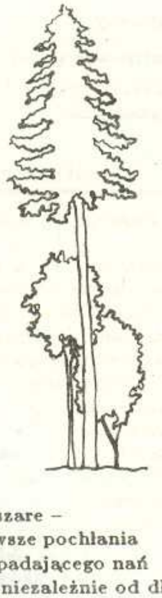
M 598. Na okręgu o dane są dwa punkty A i B. Wskazać zbiór środków okręgów wpisanych w trójkąty ABC, gdy C przebiega okrąg o.
Rozwiązanie na str. 16

M 599. Na okręgu o dane są dwa punkty A i B. Wskazać zbiór środków ciężkości trójkątów ABC, gdy C przebiega okrąg o.
Rozwiązanie na str. 5

M 600. Na okręgu o dane są dwa punkty A i B. Wskazać zbiór ortocentrów (punktów przecięcia wysokości) trójkątów ABC, gdy C przebiega okrąg o.
Rozwiązanie na str. 17

Zadania matematyczne zostały zaczerpnięte z programu zajęć z geometrii na Trzyletnim Studium Zawodowym nauczycieli matematyki na Uniwersytecie Warszawskim.

Redaguje Jarosław KULPA



Ciało doskonale szare – – ciało, które zawsze pochłania ten sam ułamek padającego nań promieniowania, niezależnie od długości jego fali.

F 306. Oszacuj, o ile średnio Ziemia ma wyższą temperaturę w styczniu, gdy znajduje się w peryhelium, niż w lipcu, gdy znajduje się w aphelium. Załóż, że Ziemia jest ciałem doskonale szarym. Mimośród orbity ziemskiej wynosi $e = 0,0167$.
Rozwiązanie na str. 4

F 307. Pewien kraj chciał skonstruować działo kosmiczne mogące wystrzeliwać pociski z pierwszą prędkością kosmiczną. Oblicz, po jakim czasie spadłby na Ziemię pocisk wystrzelony z takiego działa pionowo do góry. Zaniedbaj opór powietrza.
Rozwiązanie na str. 13