

Rys. 1

O planetach z pierścieniami słyszeliśmy – w Układzie Słonecznym jest ich aż cztery, a Saturna z pierścieniami zapewne każdy widział. Okazuje się jednak, że pierścienie (czy dyski) wokół gwiazd są też obiektami bardzo często spotykanymi (pisaliśmy o tym w *Delcie* 8/1987). W bardzo nielicznych przypadkach te dyski, a właściwie bardzo rozległe płaskie obłoki pyłowe, są widoczne w podczerwieni, w ogromnej jednak większości są to małe dyski o rozmiarach niewiele większych niż sama gwiazda centralna, a o ich istnieniu dowiadujemy się na podstawie obserwacji spektroskopowych – i o tym trochę opowiemy.

Cała klasyfikacja widmowa gwiazd opiera się na wyglądzie ich widm absorpcyjnych. Doskonale tłumaczy je klasyczna teoria atmosfer gwiazdowych, według której – w ogromnym skrócie – ze światła fotosfery (o widmie ciągłym) przy przechodzeniu przez atmosferę wylapywane są fotony o pewnych wybranych częstościach, w wyniku czego w widmie objawia się ich brak, czyli linie absorpcyjne. Tymczasem w widmach wielu gwiazd obserwuje się też linie emisyjne. Pierwsze takie gwiazdy (typu B) zostały odkryte w 1886 r. przez A. Secchiego. W roku odkrycia znano ich zaledwie pięć, a w 1970 r. ukazał się katalog Wackerlinga zawierający ich już prawie 3000. Lista ta jest ciągle uzupełniana. Obiekty takie oznacza się symbolem Be, gdy stwierdzi się obecność linii emisyjnych wodoru, często w towarzystwie linii emisyjnych jednokrotnie zjonizowanych metali, głównie żelaza. Pewna liczba jaśniejszych gwiazd Be ma dodatkowo w swoim widmie wzbronione linie emisyjne. Nazywa się je dlatego niezwykłymi, osobliwymi i oznacza jako Bep (literka „p” pochodzi od angielskiego słowa *peculiar*, tzn. dziwny, osobliwy, szczególny). Jest ich jednak niewiele, natomiast szacuje się, że w ogóle gwiazdy Be stanowią 20 % wszystkich gwiazd typu B, przy czym najczęściej ich występuje w typach B2 – B3. Obecność linii emisyjnych coraz częściej zauważa się u gwiazd każdego właściwie typu widmowego. Co więcej, obserwuje się również podwójne linie emisyjne.



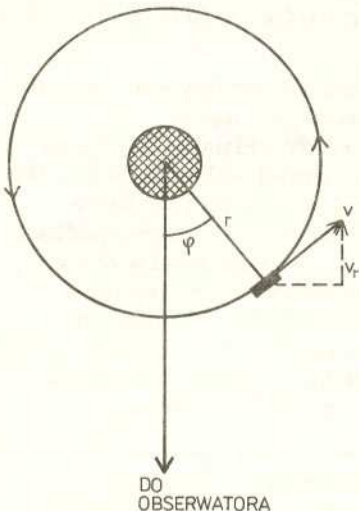
Harmonia była uznana przez pitagorejczyków za najważniejszą i najciekawszą własność świata.

Przez harmonię rozumieli oni coś, co powoduje, że najróżniejsze zjawiska tak materialne, jak intelektualne lub duchowe składają się na stabilną całość zwaną Wszechświatem. Pitagorejczycy wierzyli, że to, co dziś nazywamy matematyką, najlepiej może wyrazić harmonię świata.

Dziś harmonia kojarzy się nam ze współbrzmieniem, z estetyką, z pięknem. Nie jest to w żadnej sprzeczności z poglądami pitagorejczyków. Jednym ze sposobów obejrzenia, jak dalece piękno bliskie jest matematyce, jest graficzne przedstawienie rozwiązań matematycznych równań i nierówności.

Na następnych stronach przedstawiamy wykonane przez Klub Komputerowy Zespołu Szkół Elektrycznych w Zamościu pod kierunkiem nauczyciela, **Eugeniusza Jakubasa** wykresy rozwiązań czterech dość skomplikowanych nierówności trygonometrycznych. Oczywiście, wykonać taki wykres może jedynie komputer. Dla tych, którzy mają dostęp do komputera, podajemy też program w PASCALu, który był użyty do uzyskania wykresów. Fragmenty, które mogą różnie wyglądać dla różnych komputerów, wydrukowaliśmy kursywą. Dla języka Turbo Pascal na komputerach IBM PC należy je zastąpić następującymi instrukcjami:

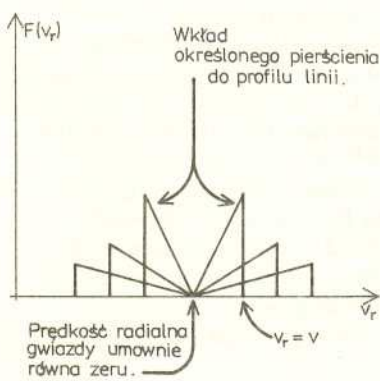
```
Użyj: uses CRT, GRAPH; var x, y, sx, sy: real; var
Driver, Mode: integer;
Zacznij: Driver := Detect; InitGraph(Driver, Mode,
''); SetBkColor(0); SetColor(7); ClearDevice;
RysujPunkt: PutPixel Jak: 7
Poczekaj: repeat until KeyPressed; CloseGraph;
```

Rys. 2

Teorię tłumaczącą obecność charakterystycznych podwójnych linii emisyjnych w widmach gwiazd Be zaproponował w 1931 r. Otto Struve. Jak łatwo domyśleć się na podstawie tytułu artykułu, teoria ta przyjmuje właśnie istnienie gazowego dysku obracającego się wokół centralnej gwiazdy. Według modelu Struwego gwiazda byłaby zanurzona w otoczce rozciągniętej w jej płaszczyźnie równikowej. Taki dysk jest jonizowany przez promieniowanie nadfioletowe centralnej gwiazdy (temperatura powierzchniowa gwiazd typu B jest rzędu 20 000 K, a zatem maksimum energii przypada na fale 0,15 μm , czyli bliski nadfiolet) i w procesie rekombinacji wysiewa następnie kwanty odpowiadające liniom emisyjnym. Taka interpretacja wymaga dysków o promieniach 5 – 15 promieni gwiazdy centralnej i gęstości $10^{10} - 10^{12}$ atomów/ cm^3 .

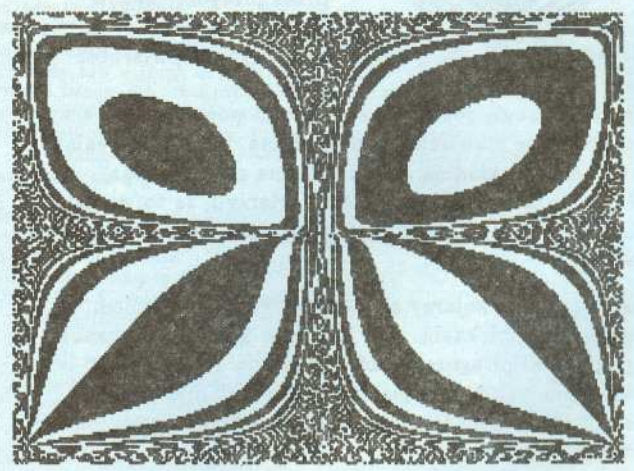
Skoro zapostulowano istnienie dysku wokół gwiazdy, to rozdwojenie linii jest zrozumiałe: przy odpowiednim ustawieniu względem kierunku widzenia jedna część rotującego dysku oddala się od obserwatora, a druga zbliża – wtedy efekt Dopplera powoduje owo rozdwojenie. Przyjęty tu model umożliwia jednak ponadto odtworzenie całego profilu rozdwojonej linii (profil to przebieg zależności natężenia promieniowania od częstości w obrębie linii). Wyobraźmy sobie więc, że obserwator jest w płaszczyźnie dysku i że ruch cząstek dysku odbywa się według praw Keplera. Prędkość na orbicie kołowej o promieniu r wynosi wtedy $v = \sqrt{GM/r}$, gdzie G oznacza stałą grawitacji, a M masę gwiazdy. Jeżeli kąt pozycyjny, liczony w płaszczyźnie dysku, oznaczyć przez ϕ , to prędkość radialna cząstki w tym miejscu wyniesie $v_r = v \sin \phi$ (rys. 2). Natężenie światła zależy – jak powiedzieliśmy – od jego częstości, a więc pośrednio od prędkości radialnej, czyli $F(v_r)$. Wytnijmy z całego dysku cienki pierścień, którego jednostka długości świeci z mocą F_0 . Mały element długości tego pierścienia będzie tym jaskrawszy, im więcej jego atomów ustawi się wzdłuż linii widzenia (przyjmujemy tu następane założenie, że dysk jest przezroczysty), jego wkład do natężenia światła będzie zatem proporcjonalny do $F_0 |\sin \phi| = F_0 |v_r|/v \sim F_0 |v_r|/\sqrt{r}$. Należy tu, oczywiście, pamiętać, że zależność ta jest spełniona tylko dla $|v_r| \leq v$, zaś dla $|v_r| > v$ pierścień już nie istnieje i wkład do jasności linii jest zerowy (zerowanie się natężenia przy $v_r = 0$ wynika tylko z niedoskonałości modelu). Dla ustalonego r pierścień daje więc profil linii składający się z dwóch symetrycznych zębów. Profil ostateczny będzie sumą (w sensie sumowania natężeń) takich symetrycznych zębów dawanych przez poszczególne pierścienie, przy czym wkład pierścienia mniejszego będzie mniejszy (bo mniej w nim jest świecących atomów), za to obejmujący większy zakres prędkości radialnych (bo mniejszy pierścień obraca się szybciej) – patrz rysunek 3. Zauważmy, że doszło tu jeszcze jedno założenie, iż cały dysk wszędzie świeci z tą samą mocą. Widzimy teraz, jak bardzo uproszczony jest ten nasz model, a mimo to – jak się okazuje – niezłe zgadza się z rzeczywistością. Przyroda jest jednak bardziej skomplikowana i z pewnością nie trzyma się ściśle poczynionych tu założeń, za to ten sam model może pasować do przezroczystych dysków bez względu na to, czy są to, jak w tym artykule, fragmenty otoczek gwiazd Be, czy dysków akrecyjnych wokół czarnych dziur.



Rys. 3

```

program motyl;
  Użyj
begin
  Zaczynij
  sx := 80; sy := 27; x := -127/sx;
  while x < 126/sx do
  begin x := x+1/sx; y := -95/sy;
  while y < 95/sy do
  begin y := y+1/sy;
  if sin(y/(x*sin(y)))+x/(y*cos(x)) < 0
  then RysujPunkt(round(x*sx)+128,
  round(y*sy)+95,
  Jak);
  end;
  end;
  end;
  Poczekaj
end.
  
```





Notatki o spadku meteorytów spotykamy już w starożytnych kronikach chińskich. Zjawiska te były (i są) nie tak bardzo rzadkie, zdawałoby się więc, że ludzkość powinna być z nimi oswojona. Tymczasem do końca XVIII w. świat naukowy traktował doniesienia o „spadku kamieni z nieba” mniej więcej tak, jak my dziś traktujemy doniesienia o Marsjanach. Szacowna skądinąd paryska Akademia Nauk ogłosiła wręcz, że nie zamierza się zajmować w ogóle tymi sprawami. Trzeba trafić, że właśnie we Francji pod Aigle spadł 26 IV 1803 r. deszcz kamienny, przy czym niektóre bryły miały masę kilku kilogramów, a całemu zdarzeniu towarzyszyły potężne efekty dźwiękowe. Fakt ten zmusił cały świat do uznania spadania kamieni z nieba za zjawisko przyrody.

Rocznie spada na Ziemię około 100 kg materii meteorytowej. Najefektowniejszy spadek meteorytów w Polsce nastąpił 30 I 1868 r. pod Pułtuskim. Drugi obfity deszcz meteorytów spadł pod Łowiczem 12 III 1935 r. W muzeach świata można zobaczyć meteoryty wielotonowe, a największy ze znalezionych ma masę około 60 t i leży w miejscu znalezienia pód Hoba w Południowej Afryce. Sama Ziemia nosi ślady upadku meteorytów jeszcze większych. Najlepiej zachowany (widocznie najmłodszy) jest krater pod Winslow w Arizonie (USA) o średnicy 1200 m. Największy ze znanych leży na Labradorze w Kanadzie i ma średnicę 3200 m. Kilka małych kraterów meteorytowych można obejrzeć w Morasku pod Poznaniem.

Meteoryty odróżnia się od ziemskich skał w wyniku dość subtelnych badań mineralogicznych. Za pozaziemskim pochodzeniem świadczy skład chemiczny oraz struktura krystaliczna ujawniająca się na szlifowanych płaszczynach trawionych następnie kwasami (tzw. figury Widmannstatten). W ten sposób została wyróżniona m.in. mała grupa meteorytów nazwana SNC od nazw trzech miejsc spadku: Shergotty (Indie), Nakhla (Egipt) i Chassigny (Francja). Meteoryty te zadziwiająco przypominają fragmenty gruntu Marsa i ich cechy mineralogiczne dowodzą, że wystawione były na działanie promieniowania kosmicznego przez czas stosunkowo krótki, liczony milionami lat, a sama krystalizacja ich materii nastąpiła w znacznym polu grawitacyjnym. Pozostawałoby jeszcze znaleźć wytłumaczenie, w jaki sposób znalazły się one na Ziemi.

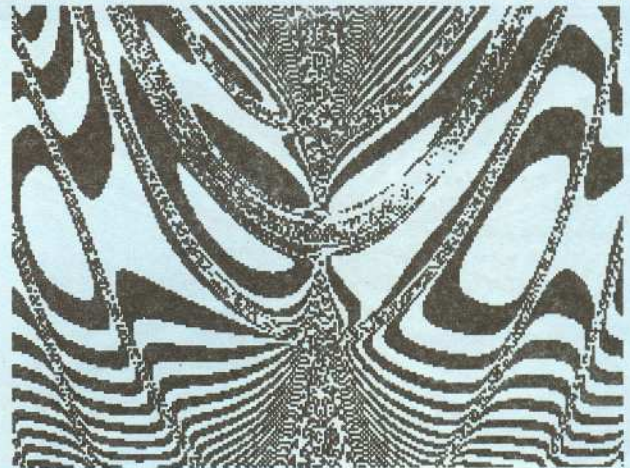


Sprawę tę rozważano w California Institute of Technology. Symulacje komputerowe pokazały, że upadek masywnego ciała na powierzchnię Marsa może spowodować wystrzelenie fragmentów gruntu z prędkościami większymi od prędkości ucieczki (wynosi ona nieco ponad 5 km/s). Aby wystrzelone odłamki zachowały swoją tożsamość, tzn. nie uległy przy tym stopieniu lub odparowaniu, upadek masywnego meteorytu na Marsa musi nastąpić ukośnie. Część materii, oczywiście, ulega przy tym odparowaniu, a strumień gazów osiągający prędkość 20 km/s może być dostatecznie gęsty, by wystrzelić z Marsa nawet metrowe bryły na orbitę okołosłoneczną. Później bryły te mogą napotkać na swej drodze np. Ziemię. Jest zatem bardzo prawdopodobne, że mamy na Ziemi meteoryty osobliwe z dwóch powodów: są one meteorytami „drugiej generacji” oraz wiadomo, skąd pochodzą.

Tomasz KWAST

```

program motyl;
  Użyj
begin
  Zaczniij
  sx := 45; sy := 25; x := -127/sx;
  while x < 126/sx do
    begin x := x+1/sx; y := -95/sy;
    while y < 95/sy do
      begin y := y+1/sy;
      if sin((y-x)/((y-x)*cos(y-x*x))
        -(y+y-x)/(x*sin(1/(x*x-y)))) < 0
      then RysujPunkt(round(x*sx)+128,
        round(y*sy)+95, Jak);
      end;
    end;
  Poczekaj
end.
  
```



Wielomiany czynnikiowe i symbol Newtona

Tadeusz
GERSTENKORN,

Tadeusz
ŚRÓDKA

W niniejszym artykule proponuje się inne niż tradycyjne wprowadzenie symbolu Newtona, a mianowicie oparte na pojęciu wielomianu czynnikiowego. Pozwala to na pewne uogólnienie bez zwiększania trudności oraz łatwiejszy i bardziej zwięzły sposób notacji, zwłaszcza przy rozwiązywaniu zadań kombinatorycznych w rachunku prawdopodobieństwa. Stanowi również okazję do poszerzenia wiadomości z dziedziny wielomianów.

Definicja 1. Wielomian czynnikiowy (zwany także niekiedy **faktorialnym** lub **silniowym**, a także **uogólnioną potęgą**) stopnia r względem x z krokiem h określamy rekurencyjnie

$$(1) \quad x^{[0,h]} = 1, \quad x^{[r,h]} = x^{[r-1,h]}(x - (r-1)h), \quad r = 1, 2, 3, \dots,$$

przy czym h jest dowolną liczbą rzeczywistą.

Z określenia wynika, że

$$x^{[r,h]} = x(x-h)(x-2h)\dots(x-(r-1)h), \quad r = 1, 2, 3, \dots$$

W przypadku $h = 1$ będziemy pisać

$$x^{[r,1]} = x^{[r]}$$

i mówić o wielomianie czynnikiowym zstępującym, tj.

$$x^{[r]} = x(x-1)(x-2)\dots(x-r+1), \quad r = 1, 2, 3, \dots,$$

przy czym uwzględniając (1) mamy

$$(2) \quad x^{[0]} = 1.$$

Jeżeli $h = 0$, to, oczywiście,

$$x^{[r,0]} = x^r,$$

tj. potęga x jest szczególnym przypadkiem wprowadzonego wielomianu.

Jeśli $h = -1$, stosujemy zapis

$$x^{[r,-1]} = x^{[-r]}$$

i mówimy o wielomianie czynnikiowym wstępującym. W tym przypadku mamy więc

$$x^{[-r]} = x(x+1)(x+2)\dots(x+r-1), \quad r = 1, 2, 3, \dots$$

Przykład 1. Obliczyć: a) $x^{[3,2]}$, b) $x^{[-3]}$.

Rozwiązanie.

$$a) \quad x^{[3,2]} = x(x-2)(x-4),$$

$$b) \quad x^{[-3]} = x(x+1)(x+2).$$

Przyjmujemy następującą definicję symbolu $\binom{p}{k}$ (czytaj: p nad k) zwanego symbolem Newtona.

Definicja 2. Dla dowolnej liczby rzeczywistej p

$$(3) \quad \binom{p}{k} = \frac{p^{[k]}}{k!} = \frac{p(p-1)(p-2)\dots(p-k+1)}{k!},$$

jeśli k jest liczbą naturalną; poza tym, wyjąwszy $k = 0$,

$$\binom{p}{k} = 0.$$



Rozwiązanie zadania F 306.
Niech R oznacza długość wielkiej półosi orbity ziemskiej, $R(1-e)$ jest odległością Ziemia - Słońce w peryhelium, a $R(1+e)$ w aphelium. Niech $T_a + \Delta T$, T_a oznaczają odpowiednio średnie temperatury Ziemi w peryhelium i aphelium. Dla ciała doskonale szarego moc wypromieniowywana jest proporcjonalna do czwartej potęgi temperatury. Moc dostarczona przez Słońce jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości Ziemia - Słońce. Korzystając z bilansu energii dostarczonej i wypromieniowanej mamy:

$$T^4 \sim \frac{1}{r^2}$$

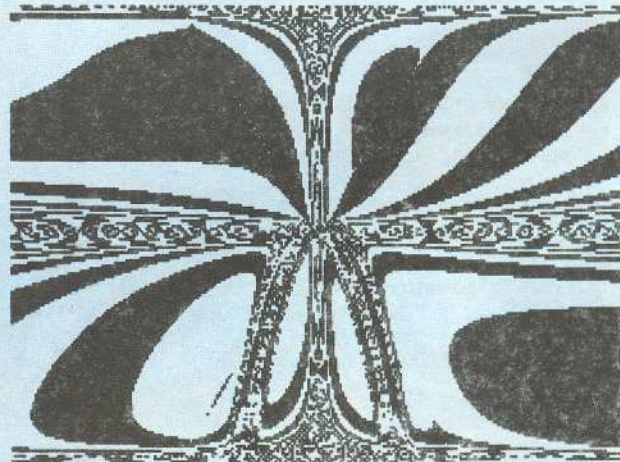
$$\frac{(T_a + \Delta T)^4}{T_a^4} = \frac{R^2(1+e)^2}{R^2(1-e)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta T}{T_a} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} - 1.$$

Szacując $T_a \approx 273$ K dostajemy $\Delta T \approx 5^\circ$ C.

program motyl;

```
Użyj
begin
  Zaczynaj
  sx := 18; sy := 27; x := -127/sx;
  while x < 126/sx do
    begin x := x+1/sx; y := -95/sy;
    while y < 95/sy do
      begin y := y+1/sy;
      if sin(y/(x*sin(y))-sqrt(abs(y*y-x*x)))
        -x/(y*cos(1/(x+y/x))) < 0
      then RysujPunkt(round(x*sx)+128,
        round(y*sy)+95, Jak);
      end;
    end;
  Poczekaj
end.
```





Z definicji silni dla $k = 0$ ($0! = 1$) oraz z (2) mamy

$$\binom{p}{k} = 1, \text{ jeśli } k = 0.$$

Z definicji 2 wynika, że gdy p i k są liczbami naturalnymi ($p = n$), to

$$(4) \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ dla } 0 \leq k \leq n$$

oraz

$$\binom{n}{k} = 0 \quad \text{dla } k > n.$$

Z (4) po prostych przekształceniach otrzymuje się często stosowane wzory:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n,$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Przykład 2. Obliczyć wartość wyrażień: a) $\binom{-7}{3}$, b) $\binom{3/2}{4}$.

Rozwiązanie. Korzystając ze wzoru (3) mamy

$$a) \quad \binom{-7}{3} = \frac{(-7)(-8)(-9)}{3!} = -84,$$

$$b) \quad \binom{3/2}{4} = \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{3}{2})}{4!} = \frac{3}{128}.$$

Przykład 3. Wykazać, że dla $p > 0$ i k naturalnego zachodzi równość

$$\binom{-p}{k} = (-1)^k \binom{p+k-1}{k}.$$

Rozwiązanie. Ze wzoru (3) mamy

$$\begin{aligned} \binom{-p}{k} &= \frac{(-p)^{|k|}}{k!} = \frac{(-p)(-p-1)\dots(-p-k+1)}{k!} = \\ &= \frac{(-1)^k(p+k-1)(p+k-2)\dots p}{k!} = \\ &= \frac{(-1)^k(p+k-1)^{|k|}}{k!} = (-1)^k \binom{p+k-1}{k}. \end{aligned}$$

Przy okazji stwierdzamy, że zachodzi równość

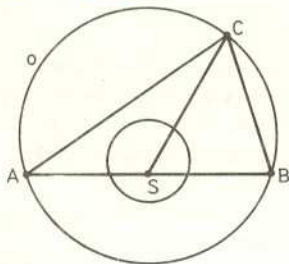
$$(-p)^{|k|} = (-1)^k p^{|-k|},$$

wyrażająca zależność między wielomianami czynnиковymi zstępującymi i wstępującymi.

Na powiązanie wielomianów czynnиковych zstępujących z rachunkiem różnicowym, na ciekawe własności wynikające z ustalenia relacji między nimi a wielomianami zwykłymi (liczby Stirlinga pierwszego rodzaju) wskazał R. Rabczuk (*Matematyka*, 5-6 (103), 1968, str. 196-199).



Rozwiązanie zadania M 599. Jest to okrąg będący obrazem okręgu o w jednokładności o skali $\frac{1}{2}$ względem środka S odcinka AB (bez przecięcia tego okręgu z AB).



Wystarczy zauważyć, że dla każdego położenia punktu C środek ciężkości trójkąta ABC leży w $\frac{1}{3}$ odległości SC od punktu S (środek ciężkości to punkt przecięcia środkowych, a te dzieli się w stosunku 2 : 1).

```

program motyl;
  Użyj
begin
  Zacznij
  sx := 15; sy := 10; x := -127/sx;
  while x < 126/sx do
    begin x := x+1/sx; y := -95/sy;
    while y < 95/sy do
      begin y := y+1/sy;
      if sin((x*x*x-y*y*y)/(x*y)) < 0
      then RysujPunkt(round(x*sx)+128,
        round(y*sy)+95,
        Jak);
      end;
    end;
  Poczekaaj
end.
  
```

