Szereg – niespodzianka

Czy z tego, że szereg $\sum a_n$ jest zbieżny, wynika, że zbieżny jest też szereg $\sum a_n^3$?

Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ dąży do zera, to ciąg $\{a_n^2\}$ zmierza do zera „szybciej". Początkujący matematyk mógłby na podstawie tej własności wysnuć wniosek, że zbieżność szeregu $\sum a_n$ pociąga za sobą zbieżność szeregu $\sum a_n^2$. Oczywiście, nie jest to prawda; najlepiej chyba znanym przykładem jest szereg $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, którego zbieżność wynika z kryterium Leibniza. Szereg kwadratów jest natomiast rozbieżnym szeregiem harmonicznym $\sum \frac{1}{n}$. Ciąg $\{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\}$ zdąża do zera wprawdzie „wolniej" niż $\{\frac{1}{n}\}$, jego wyrazy jednak zmieniają swój znak w zależności od parzystości n.

W sposób naturalny rodzi się pytanie, czy z tego, że szereg jest zbieżny, wynika, że zbieżny jest także szereg sześcianów. Wydawałoby się, że skoro sześciany dążą do zera jeszcze szybciej niż kwadraty, znak liczby zaś i jej trzeciej potęgi są takie same, to tu odpowiedź powinna być pozytywna.

Tak jednak nie jest, co można zobaczyć na przedstawionym poniżej przykładzie. Przez S_n oznaczamy $\sum_{i=1}^n a_i$, przez T_n zaś $\sum_{i=1}^n a_i^3$.

Konstrukcja wyrazów szeregu jest następująca: pierwszy wyraz to $\frac{1}{\sqrt[3]{1}}$, gdy zaś pewnym wyrazem jest $\frac{1}{\sqrt[3]{k}}$, to każdym z następnych k wyrazów jest $\frac{-1}{\sqrt[3]{k^4}}$, a kolejnym $\frac{1}{\sqrt[3]{k+1}}$. Możemy zapisać:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{1}} - \frac{1}{\sqrt[3]{1^4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2^4}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2^4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} - \frac{1}{\sqrt[3]{3^4}} - \frac{1}{\sqrt[3]{3^4}} - \frac{1}{\sqrt[3]{3^4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} - \frac{1}{\sqrt[3]{4^4}} - \frac{1}{\sqrt[3]{4^4}} - \frac{1}{\sqrt[3]{4^4}} - \frac{1}{\sqrt[3]{4^4}} + \dots$$

Wówczas, jak łatwo sprawdzić,

$$S_2 = 0,$$
$$S_5 = S_2 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2^4}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2^4}} = 0 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} - \frac{2}{\sqrt[3]{2^4}} = 0,$$
$$S_9 = S_5 + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} - \frac{1}{\sqrt[3]{3^4}} - \frac{1}{\sqrt[3]{3^4}} - \frac{1}{\sqrt[3]{3^4}} = 0 + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} - \frac{3}{\sqrt[3]{3^4}} = 0,$$

i ogólnie dla $n \geq 2$

$$S_{\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1} = S_{\frac{n(n+1)}{2}-1} + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \underbrace{- \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}} - \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}} - \dots - \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}}_{n \text{ razy}} = 0 + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} - \frac{n}{\sqrt[3]{n^4}} = 0.$$

Z kolei dla $\frac{n(n+1)}{2} - 1 < k < \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1$ mamy

$$0 = S_{\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1} = S_{\frac{n(n+1)}{2}-1} + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \underbrace{- \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}} - \dots - \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}}_{n \text{ razy}} <$$
$$< S_{\frac{n(n+1)}{2}-1} + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \underbrace{- \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}} - \dots - \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}}_{k-\frac{n(n+1)}{2} \text{ razy}} =$$
$$= S_k < S_{\frac{n(n+1)}{2}-1} + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}.$$

Na mocy twierdzenia o trzech ciągach $S_n \to 0$ $(n \to \infty)$, więc szereg $\sum a_n$ jest zbieżny; co więcej – jego suma wynosi 0. Natomiast szereg sześcianów ma postać

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3 = \frac{1}{1} - \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^4} - \frac{1}{3^4} - \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4^4} - \frac{1}{4^4} - \frac{1}{4^4} - \frac{1}{4^4} + \dots$$

Zauważmy, że w przypadku tego szeregu

$$T_2 = \frac{1}{1} - \frac{1}{1^3},$$
$$T_5 = \frac{1}{1} - \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^3},$$
$$T_9 = \frac{1}{1} - \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^4} - \frac{1}{3^4} - \frac{1}{3^4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^3}$$

i ogólnie dla $n \geq 1$

$$T_{\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3},$$

a zatem

$$T_{\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1} = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) - \left(\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{n^3}\right).$$

Ponieważ szereg $\sum \frac{1}{n}$ jest rozbieżny, a szereg $\sum \frac{1}{n^3}$ zbieżny, więc ciąg $\left\{T_{\frac{n(n+1)}{2}-1}\right\}$ nie ma granicy. Zatem granicy nie ma też ciąg $\{T_n\}$, a więc $\sum a_n^3$ jest rozbieżny.

W podobny sposób można skonstruować szereg $\sum a_n$ zbieżny, taki, by szereg $\sum a_n^{2k+1}$ (przy ustalonym $k \geq 1$) był rozbieżny. Konstrukcję tę pozostawiam Czytelnikowi.

Włodzimierz ZWONEK

I. Stewart i D. Tall w książce „Complex Analysis" piszą, że studenci często mają problemy w odróżnieniu ciągu od szeregu. By im pomóc, przytaczają następujący dowcip:

Dwaj kowboje kupili sobie po koniu. Mieli jednak problemy, jak je rozpoznać; w związku z tym jeden kowboj zaproponował, że utnie swojemu koniowi ogon. Tak też zrobił; niestety, w nocy ktoś zakradł się do stajni i uciął drugiemu koniowi ogon. W tej sytuacji drugi kowboj uciął swojemu koniowi lewe ucho. Niestety w nocy ... Po dwóch tygodniach, gdy oba konie były w tragicznym stanie, pierwszy kowboj powiedział:

– Wiesz, tak to nic z tego nie będzie. Lepiej zapamiętajmy, że mój koń jest czarny, a twój biały.

I tak samo jest z ciągiem i szeregiem: przed szeregiem stoi znak sumy.

Historyjka całkiem abstrakcyjna? Posłuchajmy opowieści pewnego matematyka:

Byliśmy z kolegą na uniwersytecie za granicą, dojechał do nas trzeci matematyk. Podczas rozmowy opowiadaliśmy m.in. o innych gościach instytutu. W pewnym momencie wyjrzałem przez okno i powiedziałem : „O, patrz, właśnie idzie Jean-Claude". „Który to?" – zapytał przyjezdny, gdyż w stronę wejścia zmierzali dwaj panowie. „Ten pierwszy" – odparłem. Niestety, właśnie jeden z nadchodzących wyprzedzał drugiego, nie było więc to określenie jednoznaczne. „Ten z kręconymi włosami" – uściśliłem, jednakże włosy obu można było uznać za kręcone. I być może trwałoby to jeszcze długo, ale na szczęście przypomniałem sobie niedawno przeczytany dowcip o koniach i rzekłem: „Ten, który nie jest Murzynem".

EPSILON – niezależny dodatek *Delty*. Redakcja: Krzysztof Ciesielski (naczelny), Danuta Ciesielska, Sławomir Cynk, Zdzisław Pogoda, Ananiasz Pośmiechowski. Adres do korespondencji: K. Ciesielski, Instytut Matematyki UJ, Reymonta 4, 30-059 Kraków, z dopiskiem ε.