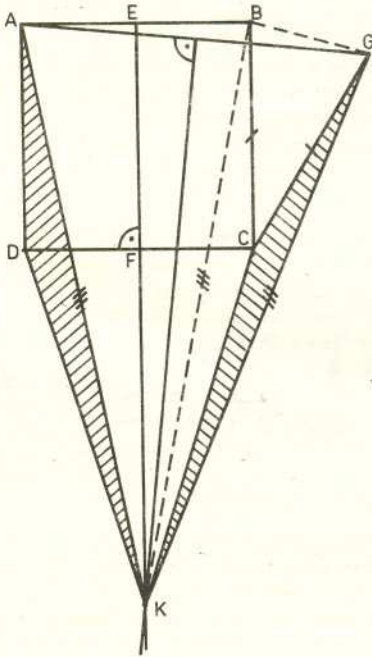


Sofizmaty – jak jest naprawdę



Rys. 14

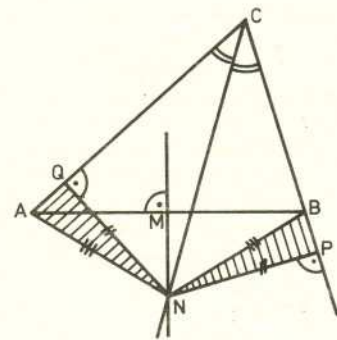
I. Tajemnicą sofizmatu jest tu położenie punktu K , który w rzeczywistości leży poniżej prostej CD , ale tak, że odcinek GK nie ma punktów wspólnych z kwadratem $ABCD$ (rys. 14). Dokładniej, $|BC| = |CG|$, $|AK| = |BK|$, $|AK| = |GK|$, a zatem $|BK| = |KG|$. Oznacza to, że punkty C i K leżą na symetralnej odcinka BG , co gwarantuje rozłączność prostej KG z kwadratem $ABCD$.

II. Wszystkie przedstawione przypadki są niemożliwe, a jedyny możliwy nie został rozpatrzony. Punkt N będzie leżał zawsze na zewnątrz trójkąta ABC i to tak, że jedna z prostokątów NP , NQ (opuszczonych na proste BC , AC odpowiednio) przecięnie bok trójkąta (np. AC , rys. 15), druga zaś przedłużenie drugiego boku. Rzeczywiście, niech $|AC| > |CB|$. Opisujemy na trójkącie ABC okrąg O . Z własności kątów wpisanych, dwusieczna kąta C przechodząc przez punkt N dzieli łuk AB na połowy. Podobnie symetralna odcinka AB . Zatem punkt $N \in O$ i jako taki leży na zewnątrz trójkąta ABC . Ponieważ $|AC| > |CB|$, więc $|\widehat{AC}| > |\widehat{CB}|$. Łącząc to z faktem, że $|\widehat{AN}| = |\widehat{NB}|$, otrzymujemy $|\widehat{CAN}| > |\widehat{CBN}|$, skąd wynika, że kąt CAN jest ostry, a kąt CBN rozwarty. Uzasadnia to poprawność rysunku 15. (Można dodatkowo wykazać, że punkty P , Q , M leżą na jednej prostej.)

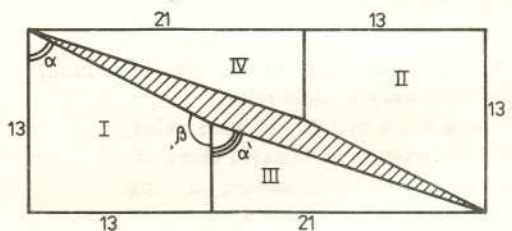
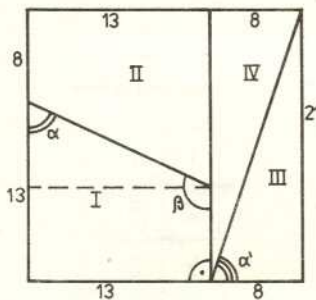
III. Dowód twierdzenia jest poprawny, jeśli oba punkty X i Y leżą na bokach czworokąta lub jeśli oba leżą na przedłużeniach tych boków. W przypadku, gdy jeden z tych punktów leży na boku czworokąta, a drugi na przedłużeniu jego boku, dowód jest fałszywy. Kontrprzykład przedstawia rysunek 16.

IV. Przy oznaczeniach takich jak na rysunku 17: $\operatorname{tg} \alpha' = \frac{13}{8}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{21}{8}$. Ponieważ $\frac{21}{8} > \frac{13}{8}$, więc $\alpha' > \alpha$. Nierówność ta, w połączeniu z faktem $\beta = \pi - \alpha$, daje

$$\beta + \alpha' = \pi + \alpha' - \alpha > \pi.$$

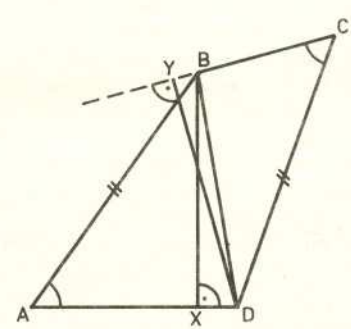


Rys. 15



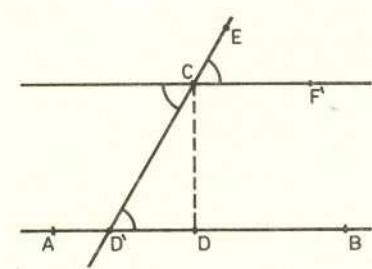
Rys. 17

V. Błąd polega tu na utożsamieniu dwóch różnych faktów: geometrycznego postrzegania ciągu krzywych i jego granicy (w naszym przypadku w sensie odległości) oraz ciągu liczbowego – długości poszczególnych krzywych.



Rys. 16

VI. Popelniony błąd należy do błędów logicznych „ignoratio elenchi” (niezrozumienia dowodzonej tezy). Dowód byłby poprawny, gdybyśmy pokazali, że przez punkt C można poprowadzić tylko jedną prostą równoległą do danej prostej AB . Istnieją inne metody (od zaprezentowanej w „dowodzie”) pozwalające na wykreślenie prostej przechodzącej przez punkt C i równoległej do AB . Na przykład: na prostej AB możemy wybrać punkt $D' \neq D$ i poprowadzić prostą $D'C$ (rys. 18). Przy odcinku EC , w punkcie C , zbudować $\angle ECF' = \angle CD'B$. Na podstawie twierdzenia o równoległości prostych, przy równości odpowiednich kątów, $CF' \parallel AB$. Gdzie jednak gwarancja, że proste CF (z rys. 11) i CF' (z rys. 18) pokrywają się? Tego właśnie należało dowieść! W naszym rozumowaniu bez dowodu przyjęliśmy to, co należało udowodnić.



Rys. 18

VII. Błąd polega na przekonaniu, że „nieskończenie wąski” trójkąt z półsfery można utożsamiać z trójkątem na płaszczyźnie o podstawie $|AB| = \frac{2\pi R}{n}$ i wysokości $\frac{\pi R}{2}$ (rys. 12). W rzeczywistości żaden trójkąt sferyczny (leżący na powierzchni sfery) nie może być utożsamiany, w powyższym sensie, z trójkątem na płaszczyźnie. Widać to chociażby stąd, że dla trójkątów na płaszczyźnie euklidesowej suma miar kątów wewnętrznych wynosi π , natomiast w przypadku trójkątów sferycznych jest ona większa od π (rys. 12 – dla sferycznego trójkąta PAB jest $|\angle PAB| = |\angle PBA| = \frac{\pi}{2}$).

VIII. Sofizmat ten jest kinematyczny. O ile okrąg o promieniu R toczy się bez poślizgu po prostej MM_1 , to w tym samym czasie okrąg o promieniu $r < R$ toczy się z poślizgiem po prostej NN_1 . Jeżeli w pewnym położeniu $|MP| = |M'P|$, to dla mniejszego okręgu $|NP_1| > |N'P_1|$, gdyż $|NP_1| = \frac{R}{r} |N'P_1|$.



Zadania

Redaguje Michał WOJCIECHOWSKI

M 595. Czy szachownicę o rozmiarach 10×10 można pokryć prostokątami 4×1 o rozłącznych wewnątrzach?

Rozwiązanie na str. 14

M 596. Niech S oznacza zbiór składający się ze środków boków 1991-kąta foremnego oraz środków wszystkich jego przekątnych. Jaka jest największa liczba punktów zbioru S leżących na jednym okręgu?

Rozwiązanie na str. 14

M 597. Na szachownicy 10×10 dysponujemy figurą, która w jednym ruchu może przesunąć się o jedno pole w prawo, o jedno pole w dół lub o jedno pole po przekątnej w lewo w górę. Czy można tą figurą obejść szachownicę będąc na każdym polu raz i wrócić do punktu wyjścia?

Rozwiązanie na str. 14

Redaguje Paweł KRAWCZYK

F 304. Czy balon napełniony helem może unieść stalową cysternę, w której hel został dostarczony?

Rozwiązanie na str. 7

F 305. Ostro zatemperowany ołówek postawiony został na czubku w pozycji dokładnie pionowej. Oszacować czas, jaki upłynie do chwili upadku ołówka, jeśli otaczające go powietrze jest całkowicie spokojne.

Rozwiązanie na str. 2

Drobiazgi

Prowadzone przez ostatnie dwa lata przez amerykańską Agencję Ochrony Środowiska badania dowodzą szkodliwego wpływu „fal elektromagnetycznych o niezwykle małych częstościach” na organizmy ludzkie i zwierzęce. Powszechnie spotykanym źródłem takich fal są domowe i przemysłowe instalacje elektryczne. Ich skutkiem jest wzrost prawdopodobieństwa zachorowania na niektóre rodzaje białaczek i raka. Jednakże mechanizm tego zjawiska pozostaje nieznanym.

Równania Einsteina opisujące zachowanie się pola grawitacyjnego w ogólnej teorii względności są na tyle skomplikowane, że nieczęsto się zdarza, iż znajduje się ich nowe rozwiązania. Sztuka ta udała się w 1990 r. J. M. M. Senovilli z Uniwersytetu w Salamance. Co więcej – rozwiązanie Senovilli wzbudziło sporo kontrowersji wśród kosmologów i relatywistów. Wbrew powszechnemu mniemaniu pokazuje ono, że możliwy jest w historii Wszechświata najpierw wzrost, a potem spadek gęstości materii bez osiągnięcia stanu, w którym gęstość stałaby się nieskończona. Ta ostatnia sytuacja charakterystyczna jest przy konwencjonalnym opisie dla momentu Wielkiego Wybuchu, w którym miał narodzić się nasz Wszechświat. Być może jednak wszystko odbyło się znacznie spokojniej.

Klimat po południowej stronie granicy amerykańsko-meksykańskiej jest w znaczący sposób cieplejszy niż po jej stronie północnej. Maksymalna dzienna temperatura w kilkudziesięciokilometrowym pasie w pobliżu granicy różni się średnio o około 4°C – gorzej jest w Meksyku. Przyczyną tego zaskakującego faktu jest ilość bydła wypasanego w obydwu krajach. W Stanach Zjednoczonych istnieją ścisłe ograniczenia na koncentrację bydła (na km^2), w Meksyku takich ograniczeń nie ma. W efekcie flora po meksykańskiej stronie ulega znacznemu zniszczeniu i bez tonującego wpływu roślinności klimat przypomina bardziej klimat pustynny niż ma to miejsce w USA.

Jednym z uświęconych wyników fizyki kwantowej jest twierdzenie Pauliego o związku spinu ze statystyką. Głosi ono, że zachowanie się funkcji falowej opisującej stan dwóch identycznych obiektów zależy od wewnętrznego momentu pędu (tj. spinu) tych obiektów. Jeżeli spin jest liczbą całkowitą (w jednostkach $\hbar = h/2\pi$), to operacja zamiany miejscami obiektów nie zmienia funkcji falowej. W przypadku spinu półokowego funkcję falową należy pomnożyć przez -1 . Obiekty pierwszego rodzaju nazywamy bozonami, drugiego – fermionami. Inne zachowanie się funkcji falowej dwóch cząstek przy ich przestawieniu jest niemożliwe. Okazuje się jednak, że wniosek ten zależy od liczby wymiarów przestrzeni – gdyby nasza przestrzeń była dwuwymiarowa, możliwe byłoby mnożenie funkcji falowej przez dowolną liczbę zespoloną o module 1. Obiekty o tej własności nazwano anyonami (z ang. any – dowolny). Być może, że w taki właśnie dziwny sposób zachowują się elektrony w niektórych kryształach o wyraźnej warstwowej strukturze, która praktycznie wyklucza przemieszczanie się elektronów w kierunku prostopadłym do warstw. Choć jest to tylko niesprawdzona hipoteza, niektórzy badacze spekulują, że to właśnie anyony odpowiedzialne są za wysokotemperaturowe nadprzewodnictwo.