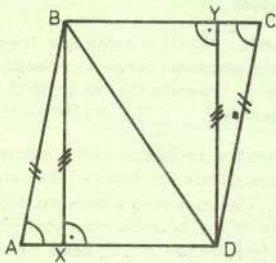


Jacek ZIABICKI

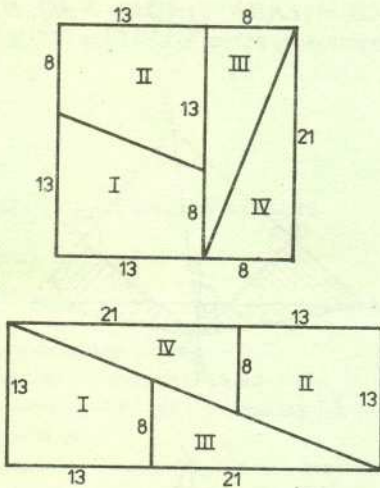
III. Jeżeli w czworokącie $ABCD$ kąt A jest równy kątowi C , a bok AB jest równy CD , to czworokąt jest równoległobokiem.

Weźmy czworokąt $ABCD$, w którym $|\angle BAD| = |\angle BCD|$ i $|AB| = |CD|$. Prowadzimy w nim proste $BX \perp AD$ i $DY \perp BC$. Łączymy punkty B i D . Trójkąty ABX , CYD są przystające, więc $|BX| = |DY|$ i $|AX| = |CY|$. Stąd trójkąty BXD , DYB są przystające, ich odpowiednie boki są równe, zatem $|XD| = |YB|$. W ten sposób $|AD| = |BC|$ i $|AB| = |CD|$, więc czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem.



Rys.6

IV. Kwadrat o boku 21 ma takie samo pole jak prostokąt o bokach 34 i 13.



Rys.7

V. $\pi = 2$.

Na odcinku AB , będącym średnicą, opisujemy półokrąg. Jego długość wynosi $\frac{\pi}{2}|AB|$. Dzielimy odcinek AB na połowy i na każdym odcinku kreślimy półokręgi po przeciwnych stronach odcinka AB . Otrzymał w ten sposób krzywa przypominająca sinusoidę i ma długość $\frac{\pi}{2}|AB|$. Teraz dzielimy odcinek AB na cztery

Między elektrycznością i magnetyzmem jest wiele analogii. Wiadomo, że bieguny (tak elektryczne, jak i magnetyczne) różnoimienne przyciągają się, a jednoimienne – odpychają. Linie pola magnesu sztabkowego i pary ładunków elektrycznych (dipola elektrycznego) wyglądają bardzo podobnie. Jest jednak zasadnicza różnica: dipol elektryczny można rozdzielić na dwa ładunki, podczas gdy po przelamaniu magnesu otrzymamy dwa małe magnesy (dipole magnetyczne), a nie pojedyncze bieguny (monopole).

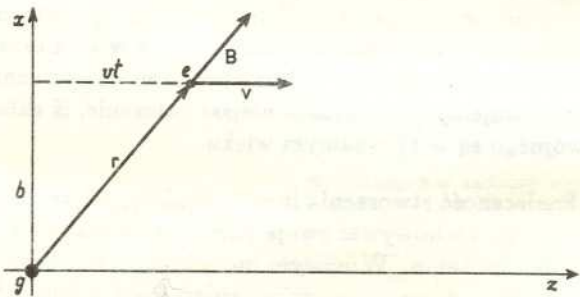
W miarę jak dzielimy magnes na coraz drobniejsze kawałki, sytuacja nie ulega zmianie. W rzeczywistości wszystkie znane fundamentalne składniki materii – atomy, jądra, cząstki elementarne – albo wytwarzają pole dipola (takie jak magnes), albo nie wytwarzają pola magnetycznego w ogóle. Pytanie, czy istnieją (mogą istnieć) w przyrodzie nie znane w tej chwili cząstki, obdarzone ładunkiem magnetycznym, pozostaje otwarte. Są pewne przesłanki teoretyczne wskazujące, że monopole powinny istnieć. Pierwszą z nich, najbardziej oczywistą, jest wspomniana symetria elektryczności i magnetyzmu – brak ładunków magnetycznych tę symetrię zaburza.

Naukowe badania nad monopolami rozpoczął w 1931 r. Paul Adrian Maurice Dirac, profesor matematyki na uniwersytecie w Cambridge, jeden z twórców mechaniki kwantowej. Dirac rozważał monopol jako podobną do elektronu cząstkę elementarną, obdarzoną zamiast elektrycznego – ładunkiem magnetycznym. Pole magnetyczne wokół takiej cząstki dane byłoby wzorem analogicznym jak dla elektrycznego ładunku punktowego

$$(1) \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0 g \mathbf{r}}{4\pi r^3},$$

gdzie μ_0 – przenikalność magnetyczna próżni, a wielkość g nazywamy ładunkiem magnetycznym monopola. Wyobraźmy sobie teraz naładowaną cząstkę (np. elektron), która przelatuje w dużej odległości b od monopola tak, że możemy zaniedbać odchylenie spowodowane siłą Lorentza (rysunek)

$$(2) \quad \mathbf{F} = e\mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$



Elektron przelatujący w dużej odległości b od monopola.

Siła ta, zgodnie z równaniem ruchu Newtona $dp/dt = F$, spowoduje zmianę pędu cząstki. Jeśli pominiemy zmianę kierunku prędkości, to siła (i zmiana pędu) będzie miała tylko składową y (prostopadłą do rysunku). Obliczmy zmianę pędu w ciągu całego czasu ruchu cząstki

$$\begin{aligned} \Delta p_y &= \int_{-\infty}^{\infty} F_y dt = \int_{-\infty}^{\infty} evB_x dt = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} egvb \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(b^2 + (vt)^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2eg}{b} \end{aligned}$$

i związaną z tym zmianę składowej x momentu pędu

$$\Delta L_x = b\Delta p_y = \frac{\mu_0}{4\pi} 2eg.$$

Jeżeli przyjmiemy kwantową hipotezę, że składowa z momentu pędu może się zmienić tylko o wielokrotność \hbar , ($\hbar = h/(2\pi)$, h - stała Plancka), to otrzymamy związek

$$(3) \quad \mu_{0eg} = n\hbar, \quad n - \text{liczba całkowita;}$$

musi on być spełniony dla każdej cząstki o ładunku e , która mogłaby się znaleźć w pobliżu monopola. Ponieważ zmiana momentu pędu ΔL_z jest niezależna od minimalnej odległości b cząstki od monopola, możemy wybrać b dowolnie duże - usprawiedliwia to nasze przybliżenie, a zarazem rozszerza zakres stosowalności (3) na wszystkie cząstki znajdujące się dowolnie daleko.

Wzór (3) nazywany jest warunkiem kwantyzacji Diraca, ponieważ wynika z niego skwantowanie ładunku elektrycznego i magnetycznego. Widać z niego, że jeżeli najmniejszy, występujący w przyrodzie, ładunek elektryczny oznaczymy przez e_0 , to najmniejszym ładunkiem magnetycznym jest $g_0 = \hbar/(\mu_0 e_0)$ (odpowiada to $n = 1$). Wszystkie możliwe ładunki magnetyczne są wielokrotnościami g_0 (dla wyższych wartości n). Z kolei wszystkie ładunki elektryczne są wielokrotnościami $\hbar/(\mu_0 g_0)$, czyli wielokrotnościami e_0 .

Teoria Diraca monopoli magnetycznych jest niekompletna. Monopol pojawia się w tej teorii dość sztucznie: istnienie monopoli spełniających (3) nie jest sprzeczne z resztą elektrodynamiki, ale poza estetycznym argumentem symetrii elektryczności i magnetyzmu i bardzo atrakcyjnym wytłumaczeniem dyskretnej natury ładunku elektrycznego, nie ma żadnych powodów dla istnienia monopoli. Elektrodynamika ich nie potrzebuje. W roku 1974 't Hooft i Polyakov na gruncie teorii Yanga-Millsa podali sposób konstrukcji monopola magnetycznego, który z daleka wygląda jak monopol Diraca. O ile ten ostatni traktowany był jak „czarna skrzynka” - badano tylko pole na zewnątrz nie interesując się tym, co jest w środku - budowa wewnętrzna monopoli 't Hoofta-Polyakowa jest znana i wynika z konstrukcji. Takie monopole muszą powstawać na gruncie całego szeregu teorii cząstek elementarnych (są to tzw. teorie Wielkiej Unifikacji), które, jak się uważa, mogą opisywać fizyczną rzeczywistość.

Teorie Yanga-Millsa to zbudowane na wzór elektrodynamiki teorie pola. Główne różnice: foton (nośnik oddziaływań elektromagnetycznych) jest jeden i nie niesie ładunku, podczas gdy w teoriach Yanga-Millsa jest kilka naładowanych nośników oddziaływania. Przykładami teorii Yanga-Millsa mogą być: teoria Weinberga-Salama oddziaływań elektroslabych oraz chromodynamika kwantowa (QCD), czyli teoria oddziaływań silnych. Po sukcesie teorii Weinberga-Salama, która unifikuje (tzn. opisuje w ramach jednej teorii Yanga-Millsa) oddziaływania elektromagnetyczne i słabe, zaczęły powstawać teorie Wielkiej Unifikacji, unifikujące oddziaływania: elektromagnetyczne, słabe i silne.

Jak to pogodzić z faktem, że nikt jeszcze nie zaobserwował monopola? Oddziaływanie monopoli magnetycznych z materią (przede wszystkim z momentami magnetycznymi elektronów, protonów i jąder) jest dobrze zbadane. Wiadomo, że prowadziłyby ono do deformacji i rozszczepienia jąder, wzbudzania i jonizacji atomów, powstawałyby „atomy” i „cząsteczki” monopolowe. Oddziaływanie to jest na tyle silne, że możliwe było skonstruowanie detektorów wykrywających pojedyncze monopole. Nie ma więc obawy, że nieświadomie żyjemy w morzu monopoli magnetycznych.

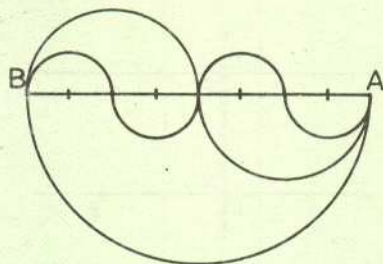
Początkowo próbowano wytworzyć monopole w akceleratorach - w podobny sposób odkryto większość znanych obecnie cząstek elementarnych. Próbowano np. przeprowadzić reakcje (g oznacza monopol magnetyczny, \bar{g} - antymonopol):

$$e^+ + e^- \rightarrow g + \bar{g}$$

$$p + \bar{p} \rightarrow g + \bar{g}$$

$$p + p \rightarrow p + p + g + \bar{g}.$$

równe części i kreślimy linię złożoną z czterech półokręgów (rys. 8), której długość też wynosi $\frac{\pi}{2}|AB|$. Proces ten kontynuujemy dzieląc odcinek AB na $2^3, 2^4, \dots$ równych części i kreśląc na nich półokręgi na przemian raz z jednej, raz z drugiej strony odcinka AB . Otrzymujemy w ten sposób ciąg krzywych, z których każda ma długość $\frac{\pi}{2}|AB|$, i których granicą jest odcinek AB . Zatem $\frac{\pi}{2}|AB| = |AB|$ (długość półokręgu \widehat{AB} równa jest jego średnicy), skąd $\pi = 2$.



Rys.8

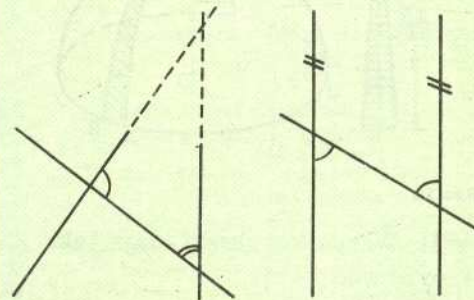
VI. Piąty aksjomat Euklidesa o równoległych można udowodnić za pomocą pozostałych aksjomatów.

Piąty aksjomat Euklidesa: jeżeli prosta, przecinająca dwie proste, tworzy kąt wewnętrzny jednostronny o sumie mniejszej od dwóch [kątów] prostych, to te dwie proste, przedłużone nieograniczenie, spotkają się z tej strony, gdzie suma jest mniejsza od dwóch [kątów] prostych (rys. 9).

28 początkowych twierdzeń *Elementów* (Księga I) ma uzasadnienia nie powołujące się na piąty aksjomat, dopiero twierdzenie 29 wymaga jego stosowania. Możemy więc wykorzystać

Twierdzenie. Jeżeli prosta padająca na dwie proste czyni kąty naprzemianległe równymi między sobą, to te dwie proste będą równoległe (rys. 10).

(Euklides, *Elementy*, Księga I, twierdzenie 27)

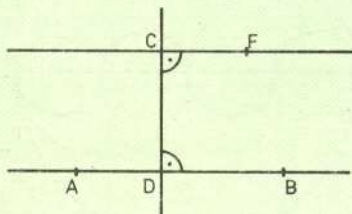


Rys.9

Rys.10

Niech AB będzie daną prostą, a C punktem nie leżącym na niej. Wykażemy, że przez punkt C możemy poprowadzić jedną prostą równoległą do prostej AB .

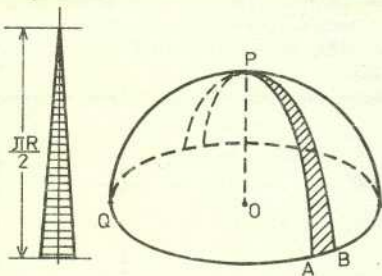
W tym celu opuszczamy z punktu C prostą na prostą AB , następnie prowadzimy prostą CF prostopadłą do CD . Prosta ta jest równoległa do prostej AB na podstawie „Twierdzenia o równoległości prostych przy równości odpowiednich kątów”. Wiedząc, że z punktu na prostej można opuścić dokładnie jedną prostą prostopadłą, oraz że z punktu leżącego na prostej można wyprowadzić dokładnie jedną prostą prostopadłą do tej prostej, widzimy, że prosta CE jest wyznaczona jednoznacznie.



Rys.11

VII. Powierzchnia sfery o promieniu R jest równa $\pi^2 \cdot R^2$.

Rozpatrzmy półsfery o środku O i promieniu $|OP| = R$. Okrąg Q (rys. 12) dzielimy na dużą liczbę (!) n równych części i punkty podziału łączymy łukami kół wielkich z punktem P . Półsfera rozpada się na n trójkątów sferycznych o powierzchni $\frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{n} \cdot \frac{\pi \cdot R}{2} = \frac{1}{2n} \cdot \pi^2 \cdot R^2$. Zatem pole n trójkątów wynosi $\frac{1}{2} \cdot \pi^2 \cdot R^2$, a pole sfery $\pi^2 R^2$.



Rys.12

VIII. Wszystkie okręgi mają taki sam obwód.

Rozpatrzmy dwa współśrodkowe okręgi o różnych promieniach r i R , gdzie $r < R$. Do okręgów tych w punktach N i M (N , M leżą na jednej półprostej) prowadzimy styczne NN_1 i MM_1 .

Żeby takie reakcje mogły zajść, musimy dysponować energią dwukrotnie większą niż energia spoczynkowa ($E = mc^2$) powstającego monopola. Z teorii Diraca nie wynika, jaką masą taki obiekt ma być obdarzony. Dirac założył, że klasyczny promień monopola ma być równy klasycznemu promieniowi elektronu i stąd otrzymał oszacowanie $m_g \approx 2,4 \text{ GeV}$ (dla porównania, masa protonu $m_p = 0,938 \text{ GeV}$). Największe działające obecnie akceleratory mogą przyspieszać cząstki do energii rzędu 1000 GeV , a więc wytworzenie monopola w akceleratorze byłoby realne. Niczego takiego nie zarejestrowano, mimo że dotąd prowadzone są próby na kolejnych, coraz większych akceleratorach. Wiadomo już, że nie ma monopoli o masie mniejszej niż 150 GeV .

Korzystając z równoważności masy i energii, $E = mc^2$, masę można mierzyć w jednostkach energetycznych, np. w dżulach, elektronowoltach lub gigaelektronowoltach. Poprawnie należałoby napisać $m_g c^2 \approx 2,4 \text{ GeV}$, ale fizycy cząstek elementarnych dość powszechnie używają układu jednostek, w którym $c = 1$.

Monopol powstały zgodnie z najprostszą teorią Wielkiej Unifikacji miałby masę rzędu $10^{16} \text{ GeV} = 0,02 \mu\text{g}$, inne teorie dają inne wartości, w granicach $10^{10} - 10^{19} \text{ GeV}$. Jest to olbrzymia energia, porównywalna z energią kinetyczną sportowego samolotu. Takiej energii na cząstkę nie ma i nie będzie miał żaden akcelerator. Tak masywne cząstki mogły powstać jedynie we wczesnym Wszechświecie, zaraz po Wielkim Wybuchu.

Eksperymenty laboratoryjne zaprojektowane do szukania monopoli (tak lekkich, jak i ciężkich) w promieniowaniu kosmicznym, atmosferze, materiałach ferromagnetycznych, skałach księżycowych i meteorytach, prowadzone przez wiele grup badawczych przez wiele lat, z zastosowaniem różnych detektorów działających na różnych zasadach, jako jedyną odpowiedź przyniosły górne ograniczenia na strumień \mathcal{F} monopoli przechodzących przez laboratorium: od 10^{-7} do $10^{-16} \text{ s}^{-1} \text{sr}^{-1} \text{m}^{-2}$. Sensacją wzbudził odnotowany 14 lutego 1982 r. na Uniwersytecie Stanforda w USA pojedynczy impuls odpowiadający przejściu pojedynczego ładunku Diraca. Wyniku tego nie udało się nikomu powtórzyć (nawet tej samej grupie, na tym samym i na nowych, czulszych detektorach) i dlatego nikt nie uwierzył, że był to prawdziwy monopol. Równocześnie nikt nie potrafił obalić tego eksperymentu, tzn. powiedzieć, co spowodowało uruchomienie detektora, mimo że uwzględniono wiele efektów, które mogłyby generować fałszywe impulsy. (Znacznie łatwiej o taki fałszywy impuls w detektorze jonizacyjnym, ale tu detektorem była nadprzewodząca pętla z drutu. Ograniczony nią strumień magnetyczny zmienia się przy przejściu przez pętlę monopola o $\mu_0 g$, indukując prąd elektryczny. Całość zamknięto w nadprzewodzącej osłonie, aby odizolować detektor od pól zewnętrznych.)

Silniejsze ograniczenia na strumień monopoli stawia astrofizyka. Wiadomo z teorii, że ładunek magnetyczny w polu magnetycznym jest przyspieszany (tak jak elektryczny – w elektrycznym) siłą $\mathbf{F} = g\mathbf{B}$. Na przykład na monopol o minimalnym ładunku w polu $B = 1 \text{ T}$ działałaby siła $3,29 \times 10^{-9} \text{ N}$. Może się wydawać, że to niewiele, ale dla porównania: na elektron w polu elektrycznym $E = 3 \times 10^8 \text{ V/m}$ (o takiej samej gęstości energii jak dla $B = 1 \text{ T}$) działa siła $4,8 \times 10^{-11} \text{ N}$. Można to podsumować, że o ile elementarny ładunek elektryczny jest mały, o tyle magnetyczny – duży (68,54 raza większy). Obserwacje (m.in. polaryzacji światła gwiazd) wskazują na obecność w Galaktyce słabego ($B = 3 \times 10^{-10} \text{ T}$) pola magnetycznego. Pole to przyspieszając monopole przekazywałoby im swoją energię. O ile nie istniałby mechanizm wytwarzający pole i dostarczający mu energii, pole to wkrótce zostałoby stłumione. (Z tego właśnie powodu nie ma w Kosmosie pola elektrycznego: zgasiłoby je swobodne elektrony i jony.) Astrofizycy potrafią oszacować, ile energii galaktycznemu polu może dostarczyć ruch gazu międzygwiazdowego. Stąd niezależnie od doświadczeń laboratoryjnych ograniczenie: $\mathcal{F} < 10^{-12} \text{ s}^{-1} \text{sr}^{-1} \text{m}^{-2}$.

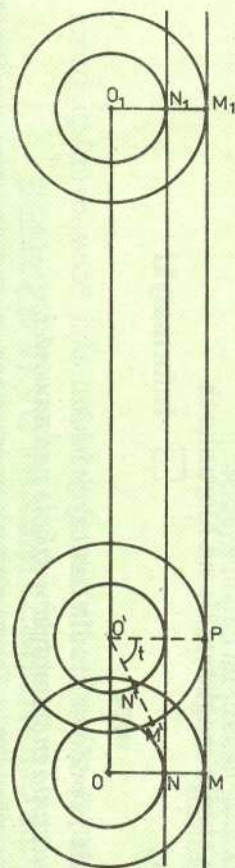
Teorie Wielkiej Unifikacji przewidują rozpad protonu. Średni czas życia byłby na tyle długi ($t > 10^{32}$ lat; dla porównania: wiek Wszechświata = 10^{10} lat, średnie czasy życia większości cząstek elementarnych leżą w przedziale $10^{-24} - 10^{-8}$ s), że rozpad ten mógł być do tej pory nie zaobserwowany. Reakcja taka byłaby silnie egzotermiczna (80% masy protonu byłoby wypromieniowane w postaci kwantu γ). W 1982 r. Callan i Rubakov obliczyli, że monopole z Wielkiej Unifikacji bardzo silnie katalizują ten rozpad: zderzenie protonu z monopolem prawie zawsze kończyłoby się rozpadem. Stąd najostrzejsze w tej chwili ograniczenie na strumień monopoli magnetycznych: monopole uwieszone (grawitacyjnie) w gwiazdach (zwłaszcza gęstych i starych, jak gwiazdy neutronowe i białe karły) byłyby źródłem dodatkowego promieniowania. Obserwowane promieniowanie ogranicza strumień do $\mathcal{F} < 10^{-23} \text{ s}^{-1} \text{ sr}^{-1} \text{ m}^{-2}$.

Teorie Wielkiej Unifikacji przewidują powstawanie monopoli. Kłopot w tym, że przewidują ich zbyt dużo: od 10^{-1} do $10^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ sr}^{-1} \text{ m}^{-2}$. Gdyby tak było, prawie cała masa Wszechświata byłaby skupiona w monopolach magnetycznych, Wszechświat byłby zamknięty i już po 30 tysiącach lat wróciłby do pierwotnej osobliwości (ze względu na zachowanie ładunku magnetycznego minimalnie naładowane monopole są cząstkami stabilnymi – nie mogły więc się rozpaść). Obserwowane tempo ekspansji Wszechświata i tzw. parametr hamowania dopuszczają maksymalnie $\mathcal{F} = 10^{-11} \text{ s}^{-1} \text{ sr}^{-1} \text{ m}^{-2}$. Alan Guth zasugerował, że Wszechświat na wczesnym etapie swej ewolucji, ale już po utworzeniu monopoli, mógł przejść fazę gwałtownej ekspansji, zwaną inflacją (od ang. inflation – rozdmuchiwanie). W tym czasie Wszechświat rozszerzyłby się co najmniej o czynnik 10^{26} i dzięki temu monopole zostałyby „rozcieńczone”: można by się spodziewać nie więcej niż jednego monopola na cały obserwowany Wszechświat. Jest to w jak najlepszej zgodności z negatywnymi wynikami doświadczeń (złośliwi twierdzą, że grupa stanfordzka zaobserwowała właśnie ten jeden monopol). Ponieważ model inflacyjny Gutha rozwiązuje równocześnie parę innych problemów kosmologii, jest on traktowany przez fizyków i astrofizyków jak najbardziej poważnie. Obaliliby go, oczywiście, zaobserwowanie w sposób nie budzący wątpliwości choćby jednego monopola.

To, oczywiście, niemożliwe. Odosobniony, nie potwierdzony przypadek zawsze budzi wątpliwości.

Czy monopole zostaną kiedykolwiek zaobserwowane – tego, oczywiście, nikt nie wie. Nie chodzi tu jednak tylko o możliwość przełamania magnesu. Istnienie lub nieistnienie monopoli magnetycznych jest ściśle związane z najbardziej podstawowymi teoriami fizycznymi i jakikolwiek rozstrzygający wynik eksperymentalny może zadecydować o ich przyjęciu lub odrzuceniu.

Toczmy bez poślizgu okrąg o promieniu R po stycznej MM_1 . Gdy punkt M przejdzie w położenie M' , to N przejdzie w N' , gdyż oba okręgi obróćą się o ten sam kąt α . Po wykonaniu pełnego obrotu punkt M przejdzie w M_1 , zaś punkt N w N_1 (rys. 13).



Rys. 13

Wynika stąd, że $|MM_1| = |NN_1|$, tj. okręgi mają jednakowe obwoły. (Powyższy sofizm przypisywany jest grekiemu filozofowi Arystotelesowi.)



Rozwiązanie zadania F 804. Wbrew pozorom zadanie nie jest formą żartu: hel w cysternie jako silnie sprężony zajmuje znacznie mniejszą objętość niż w balonie. Tym samym może się zdarzyć, że choć wypełniona cysterna nie unosi się, to jednak balon napełniony pochodzącym z niej helem będzie w stanie unieść pustą, już cysternę. A teraz przystąpmy do rozwiązywania.

Niech M oznacza maksymalną masę, jaką może unieść balon. Rozważmy cysternę o takiej właśnie masie.

Oczywiste jest, że cysterna powinna mieć taki kształt, by pomieścić możliwie największą objętość helu. Jeśli założymy, że ściany cysterny mają stałą grubość d , to warunek ten spełnia powłoka sferyczna. Oznaczając jej promień przez R otrzymamy

$$M = 4\pi R^2 d \cdot \rho_s,$$

gdzie ρ_s jest gęstością stali. Niech ciśnienie helu w cysternie wynosi p . Rozpatrując jej równikowy przekrój łatwo znajdziemy napięcie ścian:

$$S = \frac{1/2(4\pi R^2 \cdot p)}{2\pi R d} = \frac{Rp}{d}.$$

Zakładając, że temperatura helu przed i po napełnieniu jest taka sama (i równa temperaturze otoczenia),

możemy też obliczyć objętość balonu

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \frac{p}{p_0},$$

gdzie p_0 jest ciśnieniem atmosferycznym. A zatem $M \approx V \cdot \rho$.

Zaniedbaliśmy tu gęstość helu (w porównaniu z gęstością powietrza ρ_p), a także objętość cysterny (w porównaniu z objętością balonu) oraz masę powłoki i olinowania balonu. W ten sposób dostajemy ostatecznie

$$S = \frac{3}{2} p_0 \cdot \frac{\rho_s}{\rho_p} \approx 1,5 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$$

Stal nie jest w stanie wytrzymać takich napięć. Odpowiedź na pytanie postawione w zadaniu brzmi: nie.