Matematyka i gra w szachy

Eugeniusz SZUMAKOWICZ

W 1912 roku szwajcarski matematyk E. Zermelo (znany przede wszystkim z aksjomatyki teorii mnogości) udowodnił, że w grze w szachy: albo białe mogą zawsze wygrać, lub co najmniej zremisować, albo mogą zawsze wygrać czarne. „Zawsze", to znaczy jeśli nie popełnią błędu i stosować będą swoją strategię optymalną. Twierdzenie Zermeli („szachowe") nie daje żadnej wskazówki, jak taką strategię (funkcję wyboru na węzłach drzewa gry pozycyjnej, jaką są m.in. szachy) można znaleźć; nie rozstrzyga również, która strona – białe czy czarne, ma taką strategię. Jest to przykład udowodnienia istnienia w sposób niekonstruktywny, chociaż (!) niekonstruktywność ta ma charakter pragmatyczny – teoretycznie bowiem, wobec skończonej liczby wariantów królewskiej gry (finityzm) tę strategię można by znaleźć za jakieś $\ldots 10^{10^{10^{\cdots}}}$ lat (wariantów tych jest więcej niż elektronów w obserwowanym Wszechświecie!).

Idea dowodu omawianego twierdzenia jest równie prosta co błyskotliwa – zwrócił na to uwagę polski matematyk, Jan Mycielski w latach 60. we Wrocławiu. Przypuśćmy na chwilę, idealizując, że każda partia szachów liczy 40 ruchów (80 półruchów białych i czarnych na przemian). Istnienie nieprzegrywającej strategii dla białych w tych chwilowo „usztywnionych" szachach można zapisać w języku logiki kwantyfikatorów następująco:

$$(*) \qquad \bigvee_{b_1}\bigwedge_{c_1}\bigvee_{b_2}\bigwedge_{c_2}\cdots\bigvee_{b_{40}}\bigwedge_{c_{40}}(b_1c_1,\, b_2c_2, \ldots,\, b_{40}c_{40}) \in P,$$

gdzie b_ic_i oznacza i–ty półruch białych wraz z następującym po nim i–tym półruchem czarnych, P zaś oznacza podzbiór zbioru wszystkich ciągów 40–ruchowych, taki mianowicie, że każdy jego element prowadzi do konfiguracji na szachownicy, która to konfiguracja jest co najmniej remisowa dla białych.

W dziedzinach skończonych (jaką są, oczywiście, szachy) obowiązuje ponad wszelką wątpliwość logiczne prawo wyłączonego środka: *p lub* $\sim p$. Podstawmy pod p hipotezę, że białe mają strategię nieprzegrywającą – zapisaną wzorem kwantyfikatorowym (*), wtedy:

$$\sim p \equiv \sim \Big(\bigvee_{b_1}\bigwedge_{c_1}\bigvee_{b_2}\bigwedge_{c_2}\cdots\bigvee_{b_{40}}\bigwedge_{c_{40}}(b_1c_1,\, b_2c_2, \ldots,\, b_{40}c_{40}) \in P\Big) \equiv$$

$$\equiv \bigwedge_{b_1}\bigvee_{c_1}\bigwedge_{b_2}\bigvee_{c_2}\cdots\bigwedge_{b_{40}}\bigvee_{c_{40}}(b_1c_1,\, b_2c_2, \ldots,\, b_{40}c_{40}) \notin P \equiv$$

$$\equiv \bigwedge_{b_1}\bigvee_{c_1}\bigwedge_{b_2}\bigvee_{c_2}\cdots\bigwedge_{b_{40}}\bigvee_{c_{40}}(b_1c_1,\, b_2c_2, \ldots,\, b_{40}c_{40}) \in N \setminus P,$$

gdzie N oznacza wzmiankowany już zbiór wszystkich ciągów 40–ruchowych. Ostatnia z równoważnych formuł nie mówi nic innego jak to, że czarne mają strategię wygrywającą (jeśli konfiguracja końcowa nie jest nieprzegrywająca dla białych, to jest wygrywająca dla czarnych – jeszcze raz wyłączony środek). C.b.d.o.
Z punktu widzenia absolutnej ścisłości powyższe rozumowanie zawiera luki, ale są one usuwalne, choć kosztem sztucznych i żmudnych konwencji pomocniczych.

Jak już powiedziano, twierdzenie Zermeli nie wskazuje, czy białe, czy czarne są w lepszej sytuacji. Tymczasem wieloletnie doświadczenie i teoretyczne analizy szachistów sugerują, że to białe są w lepszej sytuacji rozpoczynając grę (przewaga tempa). Argumentacja

Geometryczne sofizmaty

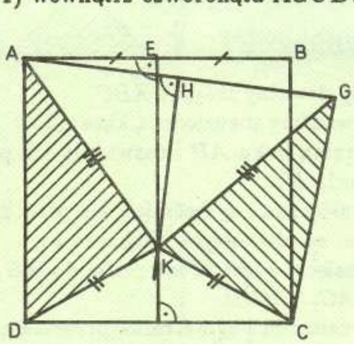
Jarosław GÓRNICKI

O Euklidesie nie wiemy prawie nic. Znany jest przede wszystkim jako autor *Elementów*. Na uwagę zasługuje również inna jego praca *Fałszywe wnioski* (*Pseudaria*). Niestety, zaginęła ona i z ogólnikowych przekazów o jej treści można domniemywać, że zawierała różne fałszywe twierdzenia geometryczne i ich błędne dowody. Do ich zrozumienia wystarczy znajomość elementarnych faktów z geometrii. Oto kilka takich sofizmatów.

Sofizmat – rozumowanie na pozór poprawne, w którym popełniono błąd logiczny, trudny nieraz do wykrycia, nadający pozory prawdziwości fałszywemu twierdzeniu.

I. Kąt prosty jest równy kątowi rozwartemu.

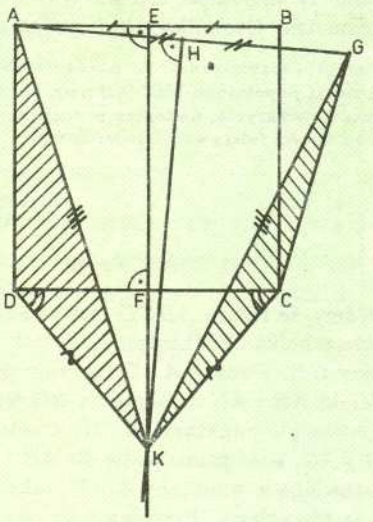
Załóżmy, że figura $ABCD$ jest kwadratem. Z wierzchołka C odkładamy odcinek CG równy CB. Punkty A i G łączymy prostą. Odcinki AB i AG dzielimy na połowy odpowiednio punktami E i H. Ponieważ $AB \nparallel AG$, więc prostopadłe do AB i AG, wystawione w punktach E i H, także nie są równoległe. Przecinają się one w pewnym punkcie K. Rozpatrzmy przypadki:
a) Punkt K leży „ponad" prostą DC (rys. 1) wewnątrz czworokąta $AGCD$.



Rys.1

Łączymy punkt K z wierzchołkami A, G, C, D. Wówczas $|KD| = |KC|$ i $|KA| = |KG|$. Zatem trójkąty KAD, KCG mają odpowiednie boki równe. Stąd $|\angle KDA| = |\angle KCG|$. Dodając kąty KDA i KDC oraz $\angle KCG$ i $\angle KCD$ ($|\angle KDC| = |\angle KCD|$) otrzymujemy równość $|\angle ADC| = |\angle GCD|$.

b) Punkt K leży na odcinku DC, tzn. dzieli on odcinek CD na połowy. Równość $|\angle ADC| = |\angle GCD|$ otrzymujemy z przystawania trójkątów KDA i KCG.
c) Punkt K leży „pod" prostą DC (rys. 2). Łączymy punkt K z punktami D, A, G i C. Wówczas trójkąty KAH i KHG są przystające. Zatem $|KA| = |KG|$. Również trójkąty KDF i KCF są przystające. Zatem $|KD| = |KC|$ i $|\angle KDC| = |\angle KCD|$. Ponadto $|DA| = |CB| = |CG|$. W ten sposób odpowiednie boki trójkąta KDA są równe odpowiednim bokom trójkąta KCG. Oznacza to, że $|\angle KDA| = |\angle KCG|$. Odejmując teraz od tych kątów równe kąty KDC i KCD, otrzymujemy: $|\angle ADC| = |\angle GCD|$.



Rys.2

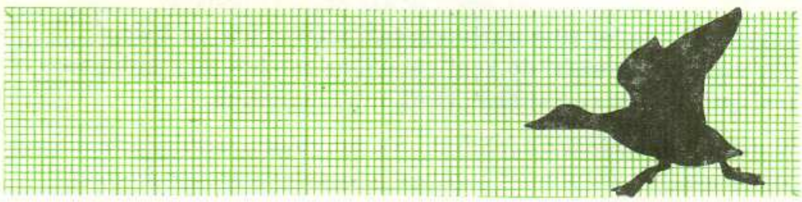
Wyjaśnienia sofizmatów na str.16

II. Każdy trójkąt jest równoramienny.

Weźmy dowolny trójkąt ABC. Poprowadźmy dwusieczną kąta C, symetralną boku AB i rozważmy ich punkt przecięcia N.
a) Dwusieczna i symetralna nie przecinają się, tzn. są równoległe. Oznacza to, że dwusieczna jest prostopadła do AB, czyli $|AC| = |CB|$.
b) Dwusieczna i symetralna przecinają się w punkcie N, będącym wewnętrznym punktem trójkąta ABC (rys. 3). Opuszczamy z tego punktu prostopadłe NP i NQ odpowiednio do boków CB i CA ($|NP| = |NQ|$). Ponadto $|NA| = |NB|$. Trójkąty prostokątne NPB, NQA są przystające, więc $|\angle NAQ| = |\angle NPB|$. Ponieważ $|\angle NAM| = |\angle NBA|$, więc $|\angle CAB| = |\angle CBA|$. Stąd $\triangle ABC$ jest równoramienny.

szachistów, w odróżnieniu od np. dowodu twierdzenia Zermeli, nie jest ścisła, nie daje pewności, lecz tylko psychologicznie ten fakt uprawdopodabnia. Jednakowoż w nauce i różnych dziedzinach działalności ludzkiej zdarzają się niespodzianki, paradoksy. Intuicyjnie czujemy, że czasem korzystnie jest oddać chwilowo inicjatywę przeciwnikowi (może nie tylko w grach hazardowych!?). Uważam, że można by znaleźć racjonalny argument na rzecz czarnych w szachach rozwiązując pozytywnie następujące problemy:
1. Skomponować zadanie szachowe niekonwencjonalnego typu: układ figur i pionów białych i czarnych jest symetryczny względem linii poziomo połowiącej szachownicę; temat: białe zaczynają – czarne wygrywają!
2. Wynaleźć grę pozycyjną dwuosobową, o symetrycznej konfiguracji początkowej, w której rozpoczynający przegrywa przy optymalnej grze, tj. stosowaniu optymalnych strategii z obu stron. A może taką grę już znamy?

W książce J. Nievergelt, J. Craig Farrar, E. M. Reinhold, *Informatyczne rozwiązywanie zadań matematycznych*, WNT, Warszawa 1978, na str. 109 – 111 jest opisana gra o nazwie Hex, pozycyjna, dwuosobowa i symetryczna. Autorzy dowodzą, że białe (rozpoczynające grę) mają strategię wygrywającą (remisy w tej grze nie są możliwe). Ideą przewodnią ich dowodu jest założenie nie wprost, że czarne wygrywają, a następnie imitowanie strategii czarnych przez białe przy pierwszym ruchu „jałowym". Mogłoby się na pierwszy rzut oka wydawać, że przypadek ten przemawia przeciwko czarnym w szachach. Jednak nietrudno zauważyć, że sposób powyższy nie przenosi się z Hexa na szachy, warcaby itp. (dlaczego?). Toteż problemy – wyzwanie (punkty 1 i 2) pozostają otwarte.



Rozwiązanie zadania F 305.
Ponieważ interesuje nas jedynie oszacowanie, więc możemy zamiast ołówka rozpatrywać wahadło matematyczne (o masie i długości równym masie m i długości l ołówka) ustawione w najwyższym położeniu. Jeśli oznaczymy kąt odchylenia wahadła (ołówka) od pionu przez θ, to równanie ruchu naszego układu przyjmie postać

$$ml\ddot{\theta} = mg\sin\theta\,.$$

Ograniczając się do małych odchyleń od pionu możemy przyjąć $\sin\theta \sim \theta$. Rozwiązanie równania ruchu jest więc funkcją wykładniczą $e^{\pm\omega t}$, gdzie $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Pionowe położenie ołówka jest położeniem równowagi nietrwałej i wystarczy dowolnie mały impuls, by rozpoczął się ruch, podczas którego θ narasta jak $e^{\omega t}$. W identyczny sposób zmieniać się będzie prędkość, a więc dla energii kinetycznej otrzymamy

$$T = Ae^{2\omega t}\,.$$

W opisanych w zadaniu warunkach źródłem początkowego impulsu jest nieustanne bombardowanie ołówka przez cząsteczki powietrza. Ponieważ każda z nich ma energię kinetyczną rzędu kT, gdzie k oznacza stałą Boltzmanna, a T – temperaturę, więc podobną energię uzyska praktycznie natychmiast i ołówek. Stąd wynika, że możemy przyjąć

$$A = kT\,.$$

W chwili upadku energia kinetyczna wynosi mgl. A zatem czas, po jakim nastąpi upadek, dany jest przez

$$t \simeq \frac{1}{2\omega}\ln\frac{mgl}{kT}\,.$$

W temperaturze pokojowej dla typowego ołówka ($ml \simeq 100$ g·cm) dostaniemy $t \simeq 2,1$ s. Porównanie tego przewidywania z wynikiem prostego doświadczenia pokazuje, że warunki zadania są praktycznie bardzo trudne do spełnienia.