epsilon 2

Sło – Sło

Beniowski – student matematyki
(początek poematu)

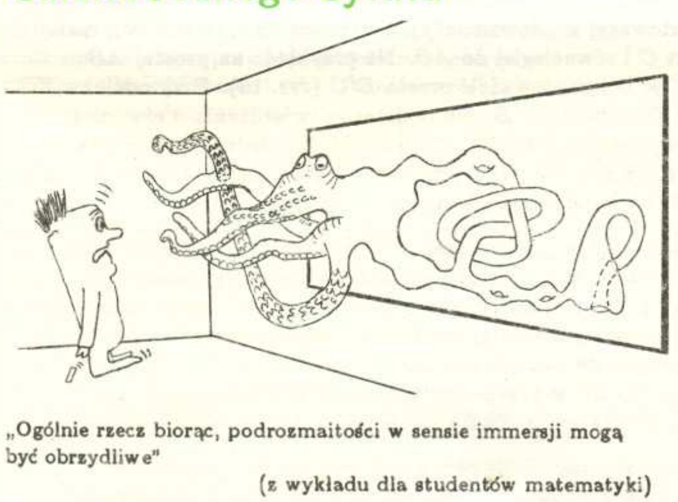
„Za panowania króla Stanisława..."
Tak to przed laty zaczynał Słowacki.
Gdzież się podziała dziś dawna oktawa?
Zginął poezji duch w narodzie lackim.
Wskrzesić go będzie to niełatwa sprawa.
Ale się znalazł pośród braci żackiej
Jeden, co w twarde tej oktawy ryzy
Ujmie podstawy trudne analizy.

A więc do dzieła. Rzucone już kości.
Tak więc z początku wprowadzimy śmiało
Ważne pojęcie (pierwotne) mnogości,
Które, jak stwierdzić by tu należało,
Jest równoważne pojęciu własności.
A gdyby było nam tego za mało,
To w jeszcze inne ująwszy to słowa
Mnogość, rzec można, to forma zdaniowa.

Zbiór – to istotne. Nie ma jednak racji
(W tym chyba każdy dziś zgodzi się ze mną)
Kto lekceważy pojęcie relacji.
Relacja może być na przykład pełną,
Lub (co nastąpi w dalszym ciągu akcji)
Ze zbioru tworzyć strukturę zupełną.
Odpowiem, owym nim się zajmę tworem
Czym jest relacja? Par pewnych jest zbiorem.

Nota bibliograficzna
Wtajemniczeni twierdzą, że pod pseudonimem Sło – Sło ukryła się spółka: Juliusz Słowacki – Wojciech Słomczyński. Podobno jeden z autorów był swego udziału nieświadomy. Utwór *Beniowski – student matematyki* (o ile wiadomo, nie dokończony) powstał w roku 1979.

Galeria Jednego Cytatu



„Ogólnie rzecz biorąc, podrozmaitości w sensie immersji mogą być obrzydliwe"

(z wykładu dla studentów matematyki)

Nie zmieniając odległości jeden

Jeśli odwzorowanie płaszczyzny w płaszczyznę przekształca punkty odległe o jeden w punkty odległe o jeden, to musi być ono izometrią (por. *EPSILON* nr 1). Przychodzi na myśl pytanie: co się dzieje, gdy funkcja o tej własności prowadzi z płaszczyzny nie w płaszczyznę, lecz w przestrzeń trójwymiarową?

Okazuje się, że znacznie łatwiej jest odpowiedzieć na analogiczne pytanie, gdy przekształcenie prowadzi z płaszczyzny w przestrzeń o wymiarze nieco większym niż trzy. Co to znaczy? Wiemy, że prostą można utożsamić ze zbiorem liczb rzeczywistych ($\mathbf{R}$), płaszczyznę ze zbiorem par liczbowych ($\mathbf{R}^2$), przestrzeń ze zbiorem trójek ($\mathbf{R}^3$). Naturalne jest, że dla dowolnego naturalnego n możemy rozważać przestrzeń $\mathbf{R}^n$. Np. każdy element $\mathbf{R}^8$ jest „ósemką" liczb rzeczywistych $(x_1, \ldots, x_8)$. Symbole $\mathbf{R}^6$ czy $\mathbf{R}^{1991}$ wyglądać mogą dla niektórych odstraszająco, nie należy się jednak przerażać. Tu ważna będzie jedynie pewna własność.

Na prostej znajdziemy bez trudu dwa punkty odległe o 1 (końce odcinka), na płaszczyźnie trzy punkty, takie, że każde dwa z nich są odległe o jeden (wierzchołki odpowiedniego trójkąta równobocznego), w przestrzeni zaś – cztery punkty (wierzchołki czworościanu foremnego) o tej własności. Nie jest więc zaskoczeniem informacja, że w $\mathbf{R}^n$ istnieje $n+1$ punktów, z których każde dwa są odległe o jeden. Takie punkty uczenie nazywa się wierzchołkami n– wymiarowego sympleksu jednostkowego.

Pokażemy, że istnieje przekształcenie płaszczyzny w $\mathbf{R}^8$ nie będące izometrią, odwzorowujące punkty odległe o jeden na punkty również odległe o jeden. Podzielmy płaszczyznę na kwadraty o boku $\frac{\sqrt{2}}{2}$ i ponumerujmy je tak, jak na rysunku.

1	4	7	1	4
2	5	8	2	5
3	6	9	3	6
1	4	7	1	4

Do każdego kwadratu dołączmy lewy dolny wierzchołek i dwa boki stykające się w tym wierzchołku (bez drugich końców). Łatwo sprawdzić, że jeżeli dwa punkty są odległe o jeden, to leżą w kwadratach oznaczonych różnymi numerami.

Ponumerujmy dziewięć wierzchołków sympleksu jednostkowego w $\mathbf{R}^8$ liczbami od 1 do 9. Funkcja nasza każdemu punktowi płaszczyzny przyporządkowuje wierzchołek sympleksu, który jest oznaczony tym samym numerem, co kwadrat, do którego badany punkt należy. Oznacza to, że jeżeli punkty leżą w kwadratach o różnych numerach, to ich obrazy są odległe o jeden. W szczególności zatem funkcja przeprowadza w różne wierzchołki punkty odległe o jeden (jako elementy kwadratów z różnymi numerami), czyli odległości takich punktów nie zmienia. Nie jest ona jednak izometrią (wystarczy rozważyć dwa różne punkty z tego samego kwadratu).

Podobnie można skonstruować funkcję z $\mathbf{R}^2$ do $\mathbf{R}^6$ o tej samej własności (zamiast kwadratów należy płaszczyznę podzielić na sześciokąty foremne). Takie przekształcenie jest, oczywiście, także przykładem rozstrzygającym problem dla wszystkich $\mathbf{R}^n$ przy $n > 6$, bo dla $k < n$ można $\mathbf{R}^k$ traktować jako podzbiór $\mathbf{R}^n$ (po dopisaniu zer na końcowych współrzędnych).

Wróćmy jednak do wyjściowego pytania. Co się dzieje, gdy funkcja prowadzi z $\mathbf{R}^2$ nie w $\mathbf{R}^8$, nie w $\mathbf{R}^6$, ale w znakomicie znaną przestrzeń $\mathbf{R}^3$? Pozostały ponadto przypadki $\mathbf{R}^4$ i $\mathbf{R}^5$.

Brzmi to może zaskakująco, ale odpowiedź na te pytania do tej pory nie jest znana.

Krzysztof CIESIELSKI

EPSILON – niezależny dodatek *Delty*. Redakcja: Krzysztof Ciesielski (naczelny), Danuta Ciesielska, Sławomir Cynk, Zdzisław Pogoda, Ananiasz Pośmiechowski. Adres do korespondencji: K. Ciesielski, Instytut Matematyki UJ, Reymonta 4, 30-059 Kraków, z dopiskiem ϵ.