Rekordy i otwarte problemy w teorii liczb

Andrzej SCHINZEL

W niniejszym artykule chcę przedstawić 15 nie rozwiązanych zagadnień z teorii liczb, których większość wybrana została bardziej ze względu na prostotę sformułowań niż na znaczenie teoretyczne. Znaczenie takie mają jednak zagadnienia 1–3, 10–12.

1. (C. Goldbach 1742). Czy każda liczba parzysta większa niż 2 jest sumą dwóch liczb pierwszych?

Wiadomo, że odpowiedź jest pozytywna dla wszystkich liczb parzystych mniejszych od $2 \cdot 10^{10}$ (A. Granville, J. van de Lune i H. J. J. te Riele), jak również, że każda dostatecznie duża liczba parzysta jest sumą liczby pierwszej i iloczynu co najwyżej dwóch czynników pierwszych (J. R. Chen). Chen dowiódł ponadto, że dla dostatecznie dużych x liczba liczb parzystych $\leq x$, które nie są sumami dwóch liczb pierwszych, nie przekracza $x^{24/25}$.

2. Co można powiedzieć o wielkości różnicy $p_{n+1} - p_n$ między kolejnymi liczbami pierwszymi w stosunku do wielkości p_n?

To pytanie sprowadza się do znalezienia funkcji f_1, f_2 rosnących możliwie najwolniej oraz funkcji g_1, g_2 rosnących możliwie najszybciej, takich że

$$p_{n+1} - p_n \leq f_1(p_n) \quad \text{dla wszystkich dostatecznie dużych } n,$$
$$p_{n+1} - p_n \leq f_2(p_n) \quad \text{dla nieskończenie wielu } n,$$
$$p_{n+1} - p_n \geq g_1(p_n) \quad \text{dla wszystkich dostatecznie dużych } n,$$
$$p_{n+1} - p_n \geq g_2(p_n) \quad \text{dla nieskończenie wielu } n.$$

Obecne rekordy są następujące. Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ można przyjąć

$f_1(x) = x^{a+\varepsilon}, \quad a = \frac{1051}{1920}$ (C. J. Mozzocchi),

$f_2(x) = (b+\varepsilon)\ln x, \quad b = 0,248\ldots$ (H. Maier),

$g_1(x) = 2,$

$g_2(x) = (c-\varepsilon)\frac{(\ln x)(\ln\ln x)(\ln\ln\ln\ln x)}{(\ln\ln\ln x)^2}, \quad c = 2,33\ldots$ (H. Maier i C. Pomerance).

Przypuszcza się, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ można przyjąć

$$f_1(x) = (\ln x)^2$$
$$f_2(x) = g_1(x) = 2$$
$$g_2(x) = (1-\varepsilon)(\ln x)^2$$

3. Czy istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych postaci $n^2 + 1$?

Największą znaną liczbą pierwszą tej postaci jest $(17 \cdot 2^{9251})^2 + 1$ (W. Keller). H. Iwaniec dowiódł istnienia nieskończenie wielu liczb postaci $n^2 + 1$, które są iloczynami co najwyżej dwóch czynników pierwszych. To samo odnosi się do dowolnego wielomianu stopnia drugiego $an^2 + bn + c$, pod warunkiem, że $a > 0$, $b^2 - 4ac$ nie jest kwadratem i największy wspólny dzielnik $a + b$, $a - b$ i c wynosi 1.

4. Czy istnieją dowolnie długie ciągi arytmetyczne utworzone
   a) z liczb pierwszych,
   b) z kolejnych liczb pierwszych?

Obecne rekordy są następujące. Istnieje ciąg arytmetyczny utworzony z 20 liczb pierwszych $214\,861\,583\,621 + 1\,943 \cdot 9\,699\,690k$, $(0 \leq k \leq 19)$ (J. Young i J. Fry) oraz ciąg arytmetyczny utworzony z 6 kolejnych liczb pierwszych $121\,174\,811 + 30k$, $(0 \leq k \leq 5)$ (L. J. Lander i T. R. Parkin).

Cichy czajnik, czyli marzenie fizyka

Jakub TATARKIEWICZ

Gdy zimowym wieczorem powracamy do domu, witają nas u kominka gościnne miłe dźwięki kociołka, w którym gotuje się woda na herbatę. (...) Powstawanie dźwięków, wydawanych przez kociołek, jest bardzo zajmujące. Dno kociołka jest tem miejscem, którego dotykają płomienie, jest więc najgorętszą częścią kociołka; tutaj właśnie najwcześniej dochodzi woda do temperatury, przy której zaczyna wytwarzać się para. Drobne pęcherzyki tej pary znajdują się z początku pod tak wysokiem ciśnieniem, jakiem jest ciśnienie całej, znajdującej się powyżej wody. W miarę jak pęcherzyki wznoszą się ku powierzchni, i dochodzą do chłodniejszych warstw wodnych, temperatura ich obniża się a wraz z tem maleje także i opór wewnętrzny. Nadchodzi chwila, gdy pęcherzyki pary nie mogą dłużej wytrzymać ciśnienia ze wszystkich stron: zapadają się wówczas z tak wielką gwałtownością, iż boki uderzają o siebie z głośnem cmokaniem. Zderzenie ich jest tak silne, iż upodobnić je można do tego, jak gdyby stal zderzyła się ze stalą; i oto szum kociołka się wzmaga, jak gdyby padały nań ciosy od niezliczonych drobniutkich młoteczków. Woda przekazuje te uderzenia metalowym ściankom kociołka; mogą one zresztą równie dobrze spadać na nie bezpośrednio. (...) Kociołek przestaje śpiewać, gdy wszystka woda dojdzie do punktu wrzenia, a pęcherzyki wzniosą się do jej swobodnej przestrzeni, nie zapadając się już po drodze.

Sir William Bragg *Świat dźwięków*, przekład dr inż. J. Roliński, wyd. *Mathesis Polska* (1935)

Mam nadzieję, iż wybaczą mi Państwo ten przydługi cytat, jest to jednak jedyna wzmianka w książkach naukowych o odgłosach, wydawanych przez naczynie do gotowania wody, którą udało się znaleźć. Udało się nie tylko mnie, lecz także recenzentom pracy, którą niedawno popełniłem. Praca, być może, ukaże się w jednym z czasopism zagranicznych, myślę jednak, że artykuł o tym, jak doszło do badania szumu czajników i jakie rezultaty osiągnięto, może być także interesujący dla Czytelników *Delty*. Oto opowieść o *cichym marzeniu fizyka*.

Przebywając na stypendium w Instytucie Fizyki Ciała Stałego im. Maxa Plancka w Stuttgarcie miałem w maju 1988 roku (jak wszyscy pracownicy Instytutu raz na pewien czas) przyjemność przygotowywania codziennej kawy, która jest podawana zaraz po obiedzie. Ślepy los zetknął mnie przy tej okazji z młodym fizykiem, który do Niemiec przyjechał z Bahrajnu. Samer Aljishi jest pierwszym doktorem nauk fizycznych tego małego kraju–wyspy, położonego w Zatoce Perskiej. Jednakże myliłby się ten, kto przypuszczałby, że dr Aljishi jest typowym przedstawicielem nauki z tzw. trzeciego świata, bowiem doktorat otrzymał na prestiżowym uniwersytecie amerykańskim w Princeton.

Tak więc Polak i Bahrajńczyk gotowali niezliczone czajniki wody, by napoić spragnionych pracowników MPI-FKF. Rozmawialiśmy o tym i owym, lecz ciągły szum podgrzewanej wody strasznie nam przeszkadzał. Wtedy właśnie powzięliśmy pomysł skonstruowania cichego czajnika. Ostatecznie nawet fizycy mogą mieć swoje marzenia. Koledzy nieco się z nas podśmiewali, sugerując, że powinniśmy badaniami zainteresować armię angielską, gdyż przyrząd taki oddawałby nieocenione usługi w czasie działań bojowych w pobliżu wojsk nieprzyjaciela. Nie przejmowaliśmy się jednak tymi docinkami, przystępując do badań na serio.

Jak na nowoczesnych naukowców przystało, rozpoczęliśmy od komputerowego przeszukania literatury. Ku naszemu zdumieniu, po wpisaniu słów kluczowych „woda, gotowanie, szum", otrzymaliśmy ni mniej ni więcej tylko 104 odpowiedzi! Po wydrukowaniu tytułów prac wybranych przez komputer szybko okazało się, że jednak w ciągu ostatnich dwudziestu lat nikt nie badał szumu czajników. Po prostu istnieje pewne bardzo duże urządzenie, w którym gotuje się wodę, a szum jest dla niego szkodliwy. Urządzeniem tym jest ... reaktor jądrowy. Szumi, oczywiście, strumień neutronów, raz to przechodząc, a raz nie przez bąble pary wodnej i tym samym zmieniając warunki pracy.

Jednakże z naszego punktu widzenia wśród ponad setki prac tylko dwie czy trzy mogły być interesujące, gdyż badano w nich także wpływ szumu akustycznego na wytrzymałość mechaniczną reaktora. O dziwo, wszystkie odszukane prace pochodziły z czasopism radzieckich. Po wielu perypetiach udało się zdobyć odbitki tych prac.

5. (N. L. Gilbraeth 1958). Tworzymy ciąg podwójny d_{mn} ($m = 0, 1, 2, \ldots$; $n = 1, 2, \ldots$) określony rekurencyjnie wzorami $d_{0,n} = p_n$, $d_{m+1,n} = |d_{m,n+1} - d_{m,n}|$. Czy prawdą jest przypuszczenie, że $d_{m,1} = 1$ dla wszystkich $m \geq 1$?

Obecnie wiadomo, że $d_{m,1} = 1$ dla wszystkich $m \leq 455\,052\,510$ (A. Odlyzko).

6. Czy istnieją liczby doskonałe nieparzyste, tj. takie liczby nieparzyste n, że

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d = 2n\,?$$

($d|n$ oznacza, że d jest dzielnikiem n)

Wiadomo, że jeśli liczby takie istnieją, to mają co najmniej 8 różnych czynników pierwszych (P. Hagis Jr.) i są większe niż 10^{300} (R. P. Brent i G. L. Cohen).

7. (E. Catalan 1888–L. E. Dickson 1913). Czy dla każdej liczby naturalnej n ciąg $n, s(n) = \sigma(n) - n, ss(n), sss(n), \ldots$ kończy się liczbą 1 lub jest od pewnego miejsca okresowy?

Odpowiedź jest pozytywna dla wszystkich liczb $n < 276$ (D. H. Lehmer i P. Poulet).

8. (R. D. Carmichael 1922). Niech

$$\varphi(n) = n \prod_{\substack{p|n \\ p \text{ pierwsze}}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

będzie funkcją Eulera. Czy istnieją liczby naturalne m, takie, że równanie $\varphi(x) = m$ ma dokładnie jedno rozwiązanie?

Wiadomo, że jeśli liczba m ma żądaną własność, to $m > 10^{10\,000}$ (P. Masai i A. La Valette).

9. (D. H. Lehmer 1932). Czy istnieją liczby złożone n, takie, że $\varphi(n)|n - 1$?

Wiadomo, że jeśli liczba złożona n ma żądaną własność, to n ma co najmniej 14 różnych czynników pierwszych (G. L. Cohen i P. Hagis Jr.).

10. (E. Jacobsthal 1961). Czy prawdą jest przypuszczenie, że dla dowolnej liczby naturalnej n złożonej z r czynników pierwszych każdy ciąg $r^2 + 1$ kolejnych liczb całkowitych zawiera liczby względnie pierwsze z n?

H. J. Kanold udowodnił powyższe przypuszczenie dla $r \leq 12$. Najlepszy obecnie znany wynik ogólny pochodzi od H. Iwańca: istnieje taka stała C, że po zastąpieniu r^2 przez $Cr^2(\log er)^2$ przypuszczenie Jacobsthala staje się prawdziwe.

11. Czy istnieje liczba rzeczywista r, taka, że przy dowolnym n, jeśli liczby $1, 2, \ldots, [r^n]$ rozbijemy na n klas, to jedna z tych klas zawiera liczby x, y, z spełniające równanie $x + y = z$ (może być $y = x$).

Wiadomo, że jeśli r istnieje, to $r \geq \sqrt[5]{315}$ (H. L. Abbott, D. Hanson–H. Fredericksen). Z drugiej strony żądaną własność ma zbiór liczb naturalnych $1, 2, \ldots, \left[n!\left(e - \frac{1}{24}\right)\right]$ (I. Schur–E. G. Whitehead).

12. (P. Erdös 1974). Czy istnieje ciąg nieskończony liczb naturalnych a_i nie zawierający żadnego ciągu arytmetycznego trójwyrazowego i taki, że $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i} = \infty$?

Nie wiadomo nawet, czy dla każdego r istnieje ciąg o żądanej własności, taki, że $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i} > r$. Rekord należy do J. Wróblewskiego, który znalazł taki ciąg a_i bez ciągów arytmetycznych trójwyrazowych, że

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i} = 3{,}00849\ldots$$

13. (P. Erdös 1955). Czy istnieje stała $c > 0$ o tej własności, że każdy ciąg liczb naturalnych $a_1 < a_2 < \ldots < a_r$, dla którego wszystkie sumy $a_{i_1} + a_{i_2} + \ldots + a_{i_s}$, $(1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_s \le r)$ są różne, spełnia nierówność

$$a_r \ge c \cdot 2^r \text{ ?}$$

Wiadomo, że jeśli stała c ma żądaną własność, to $c \ge \frac{1}{4}$ (J. H. Conway i M. Guy). Z drugiej strony wiadomo, że $a_r \ge \frac{2^{r-1}}{\sqrt{r}}$ (P. Erdös i L. Moser).

14. (P. Erdös 1950). Czy dla dowolnego c zbiór liczb naturalnych można przedstawić w postaci sumy mnogościowej skończonej liczby ciągów arytmetycznych, których różnice są wszystkie różne i nie mniejsze od c?

Wiadomo, że odpowiedź jest pozytywna dla $c = 20$ (S. L. G. Choi).

15. (P. Erdös i E. G. Straus 1950). Czy prawdą jest przypuszczenie, że dla każdej liczby naturalnej $n > 1$ równanie

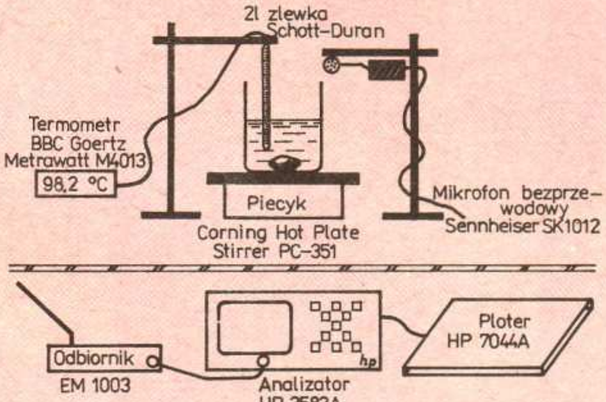
$$\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

ma rozwiązania naturalne x, y, z.

Przypuszczenie zostało sprawdzone dla wszystkich liczb naturalnych $n \le 10^8$ (N. Franceschine). Ponadto R. C. Vaughan dowiódł, że liczba ewentualnych wyjątkowych $n \le N$ nie przekracza przy odpowiednim $c > 0$ i dowolnym N liczby $N\exp\left(-c(\log N)^{2/3}\right)$.

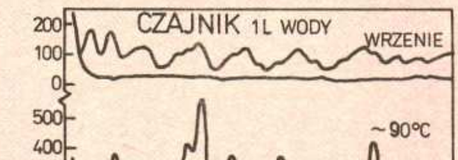
Istniejąca obecnie teoria cząstek elementarnych znana pod skromną nazwą modelu standardowego pozostaje w zgodzie z ogromną ilością danych doświadczalnych. Bodaj jedyna poważniejsza niezgodność spędzająca sen z oczu teoretykom i eksperymentatorom to tzw. problem neutrin słonecznych. Chodzi tu o wynik jednego tylko, ale za to bardzo długotrwałego, bo trwającego kilkadziesiąt lat, eksperymentu, w którym mierzy się strumień neutrin dochodzących do Ziemi ze Słońca. Zmierzona wartość strumienia okazała się trzykrotnie mniejsza niż przewidywania teoretyczne. Być może jest to efekt niedokładności modelu struktury Słońca. Wytłumaczenie takie jest akceptowalne, gdyż w doświadczeniu rejestrowano oddziaływania neutrin z chlorem, w których może uczestniczyć jedynie niewielki ułamek neutrin słonecznych. Bardziej atrakcyjną możliwość stanowi hipoteza oscylacji neutrin – procesu, w którym neutrina elektronowe zmieniałyby się w nieobserwowalne za pomocą reakcji z chlorem neutrina mionowe i taonowe. Istnienie oscylacji neutrin wymagałoby minimalnej modyfikacji modelu standardowego, a przywróciłoby symetrię pomiędzy leptonami a kwarkami. Pomimo wielkich kosztów doświadczeń neutrinowych (ze względu na minimalną reaktywność neutrin potrzebne są ogromne ilości substancji czynnej i ekranowanie od efektów promieniowania kosmicznego; to ostatnie wymaga umieszczania doświadczeń głęboko pod ziemią), w najbliższym dziesięcioleciu dwa nowe eksperymenty powinny rozstrzygnąć problem neutrin słonecznych. W pierwszym z nich, przeprowadzanym we Włoszech, w tunelu pod Gran Sasso, badane będą oddziaływania neutrin elektronowych z jądrami galu (potrzebna ilość galu wynosi około połowy rocznej światowej produkcji!). Reakcja taka jest czuła na liczniejsze neutrina o innych energiach niż w przypadku oddziaływań z jądrami chloru. W drugim doświadczeniu, niedawno zaaprobowanym przez rząd Kanady, substancją czynną będzie 1000 ton ciężkiej wody umieszczonej w kopalni niklu Sudbury. Użycie ciężkiej wody pozwoli na rejestrowanie wszystkich typów neutrin. Tym samym możliwy będzie bezpośredni test hipotezy oscylacyjnej.

Okazało się, że woda gotowana w trakcie przepływu w rurze wytwarza wyjątkowo skomplikowane widmo drgań akustycznych. A więc jednak jest co badać!



Rys. 1

Korzystając z pomocy zaprzyjaźnionych techników zestawiliśmy układ pomiarowy (jak na rysunku 1). Największym problemem było pożyczenie analizatora widm, gdyż jest to urządzenie bardzo drogie. Pomocną dłoń wyciągnął do nas prof. Klaus von Klitzing (tak, ten od kwantowego efektu Halla), nieco tylko podśmiewając się z naszego „problemu". Chcąc wykonywać eksperyment w jak najlepszych warunkach umieściliśmy układ do grzania wody w jednym pokoju, a w pokoju przyległym, oddzielonym podwójną szybą, ustawiliśmy analizator. Skorzystaliśmy przy tym z mikrofonu bezprzewodowego, wykorzystywanego na sali wykładowej. Mogliśmy więc obserwować gotowanie wody i jednocześnie wymieniać uwagi bez uciążliwego milczenia. A mieliśmy o czym rozmawiać!



Rys. 2

Już pierwsze pomiary wykazały (patrz rysunek 2), że typowy czajnik szumi w sposób niezwykle skomplikowany.