Metoda portretów fazowych

Krzysztof MAŚLANKA

Teoria równań różniczkowych dawno już awansowała do rangi samodzielnej i solidnej dyscypliny matematycznej, a zajmujący się nią z pewnością nigdy nie narazi się na zarzut, że jego przedmiot jest niemodny. Z praktycznego punktu widzenia ważna jest tu nietrywialna odpowiedniość, jaka niewątpliwie zachodzi między (niektórymi) równaniami różniczkowymi a prawami fizyki lub, bardziej wzniośle, prawami natury. Jest w tym jakieś odbicie pełnej głębokiej treści uwagi amerykańskiego fizyka węgierskiego pochodzenia, Eugene'a Wignera, który mówił o *niepojętej skuteczności matematyki w opisie rzeczywistości*.

Wspomniana odpowiedniość: *równanie różniczkowe – prawo fizyki* nie jest bynajmniej jakimś eleganckim, wzajemnie jednoznacznym przyporządkowaniem. Nie każde równanie musi koniecznie opisywać jakąś rzeczywistość. Z kolei pewne równania zawsze miały wielkie powodzenie: po prostej zmianie nazw swych współczynników mogą przydać się do opisu zupełnie nowych zjawisk.

Z czysto praktycznego punktu widzenia, na kimś, kto otrzymał jakieś równanie różniczkowe wraz z bezdusznym rozkazem „do rozwiązania", robi ono zwykle wrażenie mniej lub bardziej perfidnie zaprojektowanej szkatułki bez klucza, w której wnętrzu ukryto całą rodzinę rozwiązań.

Wyobraźmy sobie zatem dość typowy scenariusz. Oto wyrachowany Praktyk (Fizyk lub Inżynier), otrzymawszy w wyniku swych badań pewne równanie różniczkowe próbuje jakoś wydłubać choćby jedno *rozwiązanie ścisłe* i na tej podstawie powiedzieć coś o upragnionej interpretacji fizycznej. Na początek sięga do jakiejś autorytatywnej monografii, np. *Teorii równań różniczkowych* Arnolda, przez co wyraźnie pogłębia swe rozeznanie w temacie, ale nie posuwa naprzód sprawy rozwiązania. Eleganckie i wyrafinowane paragrafy *Analizy* Maurina pogłębiają tylko stan przygnębienia.

Mrucząc pod nosem jakieś niewybredne uwagi na temat poziomu wykształcenia, jakie mu zaaplikowano w przeszłości, nasz Praktyk postanawia zwrócić się do znajomych Matematyków: są w końcu specjalistami, niech ruszą głową. Pierwszy lepszy ze spotkanych uprzejmie wymawia się (*ja jestem Probabilistą*), drugi obiecuje popytać znajomych, którzy udowodnią, że rozwiązania istnieją, kolejny wreszcie roztacza wizję starej i eleganckiej teorii grup Liego, pozwalającej, w oparciu o pojęcie symetrii, skutecznie i radykalnie upraszczać równania, redukując ich stopień oraz liczbę, a nawet ... rozwiązać ściśle. Nasz Praktyk, nie wierząc własnym uszom, drżącym głosem zapytuje o szczegóły tak niezwykłej metody, wychwalając w duchu geniusz wielkiego Liego. Okazuje się, że równanie musi być symetryczne, czyli „niezmiennicze względem jakiejś grupy ciągłej". Jednak usilne przyglądanie się badanemu równaniu dowodzi, że nie raczy ono wykazywać śladów jakiejkolwiek symetrii.

Doznawszy takiego zawodu Praktyk niekiedy wstydliwie grzebie jeszcze po zbiorze Kamkego, gdzie zgromadzono, na wszelki wypadek, kilkaset szczególnych równań i ich rozwiązań. Niestety! Tego jednego akurat nie ma. Wtedy, w samą porę, przychodzi życzliwa wiadomość od znajomego Informatyka: komputery, za pomocą specjalnych języków symbolicznych, rozwiązują ogólnie równania różniczkowe! Ożywiony na nowo nadzieją Praktyk zabiera się do nauki odpowiedniego muMATHa czy innego REDUCE'a. Na to wszystko (oraz mnóstwo innych mądrości co do systemu komputera) schodzi mu pół miesiąca i po tym czasie już wie, że komputer znajdzie mu rozwiązanie równania dla oscylatora harmonicznego, ale po zadaniu jego własnego przypadku każe czekać: godzinę, dobę, tydzień ...; słowem udaje, że „się zawiesił". Co w tym czasie robi – tego nie wie nikt. Gdy więc i to nie pomaga, pełen zrezygnowania i desperacji Praktyk zasiada sam do pisania programu komputerowego, który, by sobie poprawić humor, nazywa „kodem numerycznym". Ten ostatni, oczywiście, najpierw „nie chodzi", potem daje jakieś, nie budzące zaufania, tabelki liczb, bardzo ładnie skaczące po ekranie komputera, z których jednak niewiele wynika. Niesławny finał całego zmagania (przeprowadzany już w ścisłej tajemnicy) polega na skorzystaniu z gotowego podprogramu napisanego przez fachowców. Na pocieszenie można tym razem stosowne liczby wykreślić w efektownej ramce, którą pięknie wyrysuje najnowszy program graficzny niedawno potajemnie skopiowany na Zachodzie i zainstalowany przez zadowolonego z siebie Informatyka.

Czy w tej sytuacji nie można było od razu tak postąpić? Oczywiście, że tak i wielu czyni to bez szczególnego zażenowania. U pozostałej, niezbyt licznej, części pozostaje jednak odrobina żalu. Znalezienie ścisłego rozwiązania jakichś szczególnie sławnych, zwykle wyglądających dosyć niewinnie, a w istocie beznadziejnie skomplikowanych i złośliwych równań, to sprawa warta wysiłku. Można wtedy zasiąść do pisania krótkiego preprintu pt. *Nowe ścisłe rozwiązanie* ..., mając przy tym, głęboko skrywaną, nadzieję, że ta szczególna kombinacja jakichś sinusów czy logarytmów – ozdobiona szlachetnym nazwiskiem szczęśliwego szperacza – trafi do monumentalnego *Katalogu ścisłych rozwiązań*.

Niekiedy jednak jest jeszcze i jedno, nawet jeśli nie eleganckie, to z pewnością nadzwyczaj honorowe, wyjście z tej przykrej sytuacji. Od kilkunastu dobrych już lat stosują je m.in. kosmologowie. Kosmolog to dość pokraczne stworzenie będące (są chlubne wyjątki, ale autor nie należy do nich) skrzyżowaniem niedouczonego fizyka, matematyka–amatora, a na dodatek jeszcze i takiego astronoma, który niespecjalnie wie, z której strony patrzeć do lunety.

Kosmologowie na co dzień stykają się z najpotworniejszym przypadkiem układu nieliniowych równań różniczkowych, jaki zna fizyka, równań Einsteina (kilkanaście tysięcy różnych członów w ogólnym przypadku) i nic dziwnego, że szczególnie upodobali sobie pewną dość dowcipną metodę. Jak ją najkrócej określić? Powróćmy do porównania równania różniczkowego do szkatułki bez klucza. O normalnym otwarciu nie ma mowy (oznaczałoby to znalezienie kompletu wszystkich rozwiązań), a na wyciąganie pojedynczych, przypadkowych rozwiązań rozmaitymi dorywczymi sztuczkami można stracić większość życia; dlaczego więc nie zajrzeć przez dziurkę od klucza i *obejrzeć* – niejako nie dotykając – *wszystkie* rozwiązania?

Po tym przegadanym wstępie pora na przykład, który powinien dopełnić reklamy metody. Rozważmy równanie (jedno z równań pola Einsteina):

$$H\frac{\mathrm{d}^2 H}{\mathrm{d}t^2} = AH^4 - BH^2 + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}\right)^2 - 6\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}H^2\right) + C,$$

gdzie A, B, C są stałymi, a H jest szukaną funkcją czasu t, która opisuje szybkość rozszerzania się Wszechświata; pustego, ale zdominowanego przez wszechobecny szum kwantowy, pochodzący od różnych pól fizycznych. (Konkretne wartości współczynników A, B, C zależą od ilości i rodzajów tych pól, samo C zależy ponadto od dość tajemniczej wielkości, stałej kosmologicznej, która reprezentuje energię próżni.) Każda funkcja $H(t)$, spełniająca powyższe równanie, to jakiś (kwantowy) model Wszechświata.

Nie ma tu, niestety, miejsca, by w sposób odpowiedzialny i uczciwy przedstawić wszystkie argumenty fizyczne prowadzące do konstrukcji tego równania; zajmują one cały długi rozdział w monografii P. C. W. Daviesa *Pola kwantowe w czasoprzestrzeniach zakrzywionych* i, prawdę mówiąc, nie wszystkie one są równie przekonujące i jasne. Ważne jest tu nie samo równanie, ale przykry fakt, że nie jest ono szczególnie estetyczne, czyli, z punktu widzenia teorii grup – symetryczne. I nic w tym dziwnego: szczególna symetria równania oznacza zawsze znaczną nadmiarowość, a stąd – możliwość uproszczeń.

Dokonując podstawienia

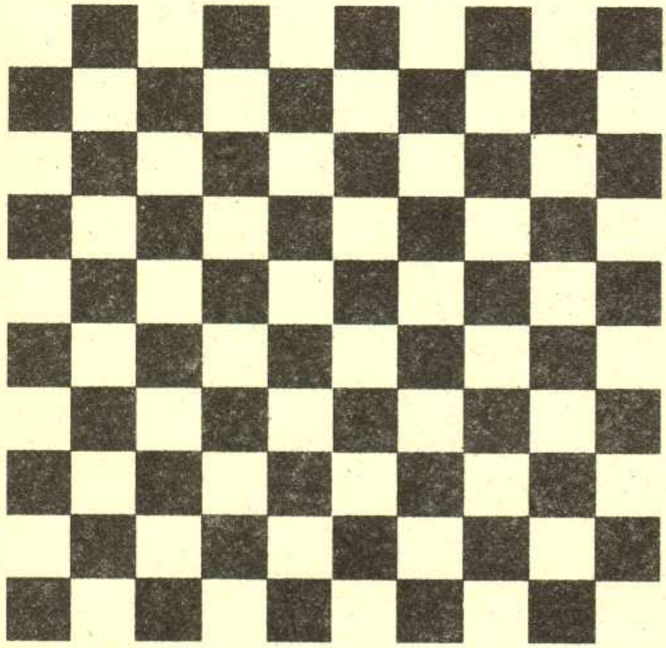
$$x = H, \quad y = \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}, \quad \mathrm{d}\tau = x^{-1}\mathrm{d}t,$$

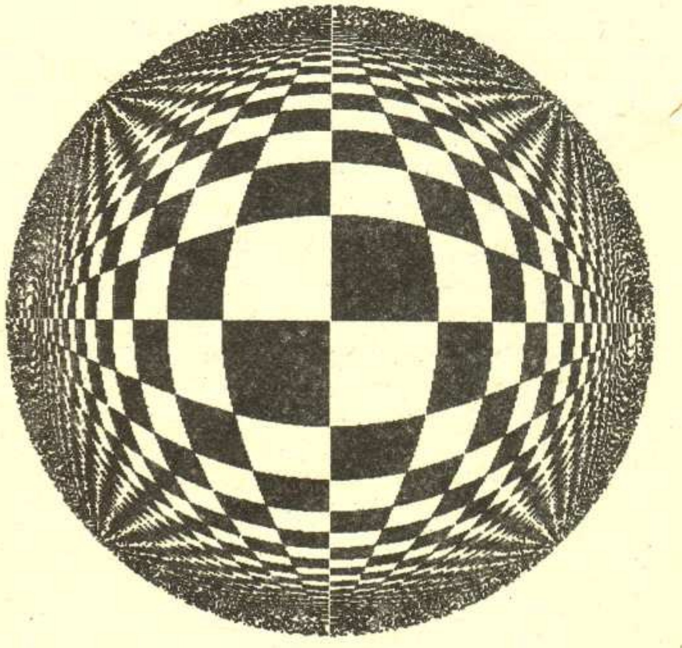
dostajemy układ równań

$$(\star) \qquad \begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} &= xy, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} &= Ax^4 - Bx^2 + \frac{1}{2}(y^2 - 6x^2 y) + C, \end{aligned}$$

w którym x oraz y są funkcjami τ, (nowego) parametru typu czasu. Obecnie, w naturalny sposób, za model kosmologiczny uważamy parę funkcji $x(\tau)$, $y(\tau)$, spełniającą układ $(\star)$. Para taka ma prostą interpretację geometryczną: jest to krzywa na płaszczyźnie xy, której punkty numerowane są

Deformacja nieskończonej szachownicy do koła Poincarégo przypomina odwzorowanie obiektywem „rybie oko" o kącie widzenia 180°. Graniczny okrąg jednostkowy to obraz „widnokręgu" wyjściowej płaszczyzny.





parametrem τ. Układ wszystkich takich krzywych leżących na całej płaszczyźnie – to obraz wszystkich rozwiązań wyjściowego równania.

Rzecz teraz w tym, by spojrzeć na całą tę płaszczyznę w sposób globalny. W tym celu wygodnie jest dokonać transformacji zwanej *kompaktyfikacją* płaszczyzny (uzwarceniem). Transformacja ta (zaproponowana przez Poincarégo) przeprowadza całą płaszczyznę w koło zgodnie z regułą:

$$\text{punkt płaszczyzny } (x, y) \longrightarrow \text{punkt koła } (\xi, \eta)\,.$$

Konkretnie

$$\xi = \frac{x}{a+R}, \quad \eta = \frac{y}{a+R}, \qquad (R \equiv |\mathbf{R}|)\,,$$

gdzie a jest dowolną dodatnią stałą, natomiast $\mathbf{R} \equiv (x, y)$ jest wektorem na wyjściowej płaszczyźnie, $\mathbf{r} \equiv (\xi, \eta)$ opisuje punkty koła. Widać, że gdy $R \longrightarrow \infty$, wtedy $\mathbf{r}$ dąży do brzegu koła. Cały zabieg przypomina wynik działania szerokokątnego obiektywu zwanego wśród fotoamatorów „rybim okiem". Patrząc z góry przez taki obiektyw (o kącie widzenia 180°) na nieskończoną szachownicę dostajemy następujący obraz całej płaszczyzny „ściągniętej" do koła jednostkowego: leżący w nieskończonej odległości „widnokrąg" przechodzi w okrąg jednostkowy.

W ten sposób powstanie graficzny *portret* badanego równania, bowiem wraz z punktami płaszczyzny także i wszystkie krzywe całkowe, tj. rozwiązania ($\star$) ułożą się wewnątrz koła. Każda z nich ulegnie deformacji, ale *jakościowo* nic się nie zmieni; w każdym razie nic, co istotne, np. topologia układu krzywych. W szczególności nie zmieni się charakter tzw. punktów krytycznych, w których krzywe mogą się schodzić. Okazuje się, że właśnie te punkty – ich rodzaj, ilość i rozmieszczenie – jednoznacznie określają topologię całej sieci rozwiązań. Patrząc na tę sieć wszystkich krzywych na kole Poincarégo (używa się też nazwy płaszczyzna fazowa) możemy bez trudu (i bez żadnych całkowań!) wskazać różne typy kwantowych modeli Wszechświata, nieomal „policzyć" je, podzielić na klasy jakościowo różnych zachowań, odpowiedzieć na pytanie, które z nich są typowe, a które wyjątkowe. Wybierając dowolny (nie krytyczny) punkt, a następnie poruszając się wzdłuż jakiejś szczególnej krzywej możemy w sposób jakościowy odtworzyć zachowanie się wybranego rozwiązania, w szczególności skąd (z jakiego punktu krytycznego) przybywa i dokąd zmierza. Inaczej mówiąc, taki zwarty i oszczędny obrazek zawiera całą istotną informację o, skądinąd beznadziejnym, równaniu oraz o, ukrytej w tym równaniu, istocie fizycznego modelu.

Rozwiązania układu równań ($\star$) na fragmencie płaszczyzny oraz ich komplet na kole Poincarégo (dla pewnych konkretnych wartości stałych A, B, C). Praktyczna konstrukcja jest następująca. Wybierzmy dowolny punkt o współrzędnych (x_0, y_0). Podstawiając te wartości do prawych stron ($\star$) dostajemy pochodne $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\tau$, $\mathrm{d}y/\mathrm{d}\tau$ w tym punkcie. Pochodne te pozwolą nam, za pomocą rozwinięcia Taylora, znaleźć nieskończenie bliski punkt (x_1, y_1) na krzywej–rozwiązaniu jako

$$x_1 \approx x_0 + \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\Delta\tau\,,$$

$$y_1 \approx y_0 + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}\Delta\tau\,,$$

gdzie $\Delta\tau$ jest małym przyrostem parametru τ. W ten sposób możemy, z dowolną dokładnością, prześledzić całą krzywą, zgodnie z parametrem τ oraz przeciwnie do jego wzrostu – aż do jakiegoś punktu, w którym pochodne będą się zerować. Sam ten punkt to również rozwiązanie ($\star$), choć nieco szczególne: statyczne. Strzałki na każdej krzywej oznaczają kierunek wzrostu parametru τ.