Liczby pierwsze i kwadraty spiralne

W 1772 roku wiadomo było (L. Euler), że dla $x = 0, 1, \ldots, p-2$ wielomiany $f_p(x) = x^2 + x + p$ przyjmują wartości będące liczbami pierwszymi, o ile $p \in \{3, 5, 11, 17, 41\}$. Od 1966 roku wiadomo, że nie ma innych wielomianów f_p o tej własności.

Stanisław Ulam zauważył, że formuła $f_p(x)$, dla $x = 0, 1, \ldots, p-2$ opisuje liczby pierwsze położone na głównej przekątnej odpowiednich „kwadratów spiralnych":

$p = 3$

5	4
6	3

$p = 5$

17	16	15	14
18	7	6	13
19	8	5	12
20	9	10	11

$p = 11$

101	100	99	98	97	96	95	94	93	92
102	67	66	65	64	63	62	61	60	91
103	68	41	40	39	38	37	36	59	90
104	69	42	23	22	21	20	35	58	89
105	70	43	24	13	12	19	34	57	88
106	71	44	25	14	11	18	33	56	87
107	72	45	26	15	16	17	32	55	86
108	73	46	27	28	29	30	31	54	85
109	74	47	48	49	50	51	52	53	84
110	75	76	77	78	79	80	81	82	83

⋮

Oto fragment kwadratu spiralnego dla $p = 41$:

421	420	419	418	417	416	415	414	413	412	411	410	409	408	407	406	405	404	403	402
422	347	346	345	344	343	342	341	340	339	338	337	336	335	334	333	332	331	330	401
423	348	281	280	279	278	277	276	275	274	273	272	271	270	269	268	267	266	329	400
424	349	282	223	222	221	220	219	218	217	216	215	214	213	212	211	210	265	328	399
425	350	283	224	173	172	171	170	169	168	167	166	165	164	163	162	209	264	327	398
426	351	284	225	174	131	130	129	128	127	126	125	124	123	122	161	208	263	326	397
427	352	285	226	175	132	97	96	95	94	93	92	91	90	121	160	207	262	325	396
428	353	286	227	176	133	98	71	70	69	68	67	66	89	120	159	206	261	324	395
429	354	287	228	177	134	99	72	53	52	51	50	65	88	119	158	205	260	323	394
430	355	288	229	178	135	100	73	54	43	42	49	64	87	118	157	204	259	322	393
431	356	289	230	179	136	101	74	55	44	41	48	63	86	117	156	203	258	321	392
432	357	290	231	180	137	102	75	56	45	46	47	62	85	116	155	202	257	320	391
433	358	291	232	181	138	103	76	57	58	59	60	61	84	115	154	201	256	319	390
434	359	292	233	182	139	104	77	78	79	80	81	82	83	114	153	200	255	318	389
435	360	293	234	183	140	105	106	107	108	109	110	111	112	113	152	199	254	317	388
436	361	294	235	184	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	198	253	316	387
437	362	295	236	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	252	315	386
438	363	296	237	238	239	240	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	314	385
439	364	297	298	299	300	301	302	303	304	305	306	307	308	309	310	311	312	313	384
440	365	366	367	368	369	370	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380	381	382	383

$\longrightarrow \ldots$

Jarosław GÓRNICKI

Rozwiązanie zadania F 808.
Zaniedbajmy opór powietrza. Wówczas ruch pocisku wystrzelonego z pierwszego czołgu jest rzutem ukośnym z prędkością początkową o składowych (poziomej i pionowej) $u_1 + v_1 \cos\alpha_1$ i $v_1 \sin\alpha_1$, u_1 oznacza tu prędkość pierwszego czołgu. Zatem czas lotu pocisku i jego zasięg wynoszą odpowiednio

$$T_1 = 2\frac{v_1 \sin\alpha_1}{g},$$

$$s_1 = (u_1 + v_1 \cos\alpha_1)T_1$$

Ponieważ przez czas T_1 drugi czołg przebył odległość $s_1' = u_2 T_1$, więc dystans między czołgami musiał wynosić w chwili strzału

$$d = s_1 + s_1' =$$

$$= 2(u_1 + u_2 + v_1 \cos\alpha_1) \cdot \frac{v_1 \sin\alpha_1}{g}.$$

Dokładnie takie samo rozumowanie dla drugiego czołgu pokazuje, że

$$d = 2(u_1 + u_2 + v_2 \cos\alpha_2) \cdot \frac{v_2 \sin\alpha_2}{g}.$$

Tym samym względna prędkość czołgów dana jest przez

$$V = u_1 + u_2 =$$

$$= \frac{{v_1}^2 \sin 2\alpha_1 - {v_2}^2 \sin 2\alpha_2}{2(v_2 \sin\alpha_2 - v_1 \sin\alpha_1)}$$

i nie zależy od odległości d. Zauważmy jeszcze, że mianownik w powyższym wzorze nie może znikać. Gdyby bowiem tak było, to z równań na d wynikałoby, że $v_1 = v_2$, $\alpha_1 = \alpha_2$. Pociski zderzyłyby się w powietrzu i warunek zadania nie byłby spełniony.

Rozwiązanie zadania M 594.
Niech $a \le b \le c \le d \le e$ będą długościami danych odcinków. Załóżmy, że z żadnych trzech spośród nich nie można zbudować trójkąta ostrokątnego. Ponieważ w nieostrokątnym trójkącie kwadrat długości najdłuższego boku jest większy lub równy sumie kwadratów długości pozostałych boków, więc $c^2 \ge a^2 + b^2$, $d^2 \ge c^2 + b^2$, $e^2 \ge d^2 + c^2$. Stąd $e^2 \ge a^2 + 2b^2 + c^2 \ge a^2 + 2ab + b^2$, czyli $e \ge a + b$, tj. z odcinków a, b, e żadnego trójkąta zbudować nie można.