KĄCIK PRAC uczniowskich

Kącik Prac Uczniowskich ukazuje się w *Delcie* od numeru 3/1988 (z przerwami: *Delta* 6, 12/1988, 1, 6, 7, 8/1989, 6/1990 i 1/1991). Zawiera on propozycje ewentualnych tematów na Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki. Oczywiście, chętnie widzimy także prace na inne tematy.

Współrzędne barycentryczne

Prawie siedem lat temu pisaliśmy w *Delcie* (8/1984) o współrzędnych barycentrycznych. Jest to wykorzystanie w matematyce pomysłu z dźwigniami, przy założeniu, że znajdujemy się w jednorodnym, stałym polu grawitacyjnym.

Jeśli w punkcie A umieściliśmy masę m_A, a w punkcie B masę m_B, to środek ciężkości tego układu wypadnie w takim punkcie P odcinka AB, że

$$\frac{AP}{BP} = \frac{m_B}{m_A}, \tag{1}$$

wiadomo: siła razy ramię. Fizycy twierdzą też, że siły działające na układ można zastąpić jedną siłą (sumaryczną) działającą na środek ciężkości. Wierząc im na słowo możemy wobec tego dołączyć jeszcze punkt C (nie leżący na prostej AB) z masą m_C i bez trudności stwierdzić, że środek ciężkości całego układu będzie w takim punkcie Q odcinka PC, że

$$\frac{PQ}{CQ} = \frac{m_C}{m_A + m_B}. \tag{2}$$

Może trochę zdziwić, że szukając środka ciężkości najpierw dla odcinka np. BC, a potem dołączając A otrzymamy ten sam punkt Q, ale sprawdzenie (proszę je wykonać) wykaże, że rzeczywiście tak będzie.

Dla tych, którzy sprawdzić nie umieją – metoda nieinteligentna, ale algorytmiczna. Jeśli punkty A, B i C mamy w układzie współrzędnych, to współrzędne punktu Q są dane przez równość

$$Q = \frac{A \cdot m_A + B \cdot m_B + C \cdot m_C}{m_A + m_B + m_C}, \tag{3}$$

proszę to sprawdzić. A to wyrażenie nie wyróżnia już żadnego z punktów A, B, C.

Jakie punkty mogą być środkami ciężkości układu A, B, C przy zmieniających się masach? Dla mas dodatnich otrzymamy wszystkie punkty wnętrza trójkąta (skąd to wiadomo?), a dopuszczając masy zerowe – również jego brzegi. No, a masy ujemne? Można przecież wyobrazić sobie masy jako odważniki, albo baloniki wypełnione helem. I co wtedy? Okazuje się, że wtedy środkiem ciężkości układu A, B, C będzie mógł być każdy punkt płaszczyzny (też koniecznie należy to sprawdzić). Ale jak to zrobić? – przecież wszystkie dotychczas przytoczone wzory dotyczyły liczb dodatnich.

Jeśli jednak poważniej potraktujemy wstępne uwagi o dźwigniach, to wzór (1) przyjmie postać

$$\overrightarrow{AP} \cdot m_A = \overrightarrow{PB} \cdot m_B,$$

który ma sens i dla mas ujemnych (różne znaki mas odpowiadają dźwigni jednostronnej, a jednakowe – dwustronnej). Analogicznie zmieni się wzór (2). Ale (co można sprawdzić) wzór (3) nie zmieni się wcale – każdy punkt X ma takie same współrzędne jak wektor $\overrightarrow{OX}$.

Skoro tak, to można ustalić raz na zawsze punkty A, B, C i uznać masy m_A, m_B i m_C za współrzędne ich środka ciężkości. Każdy od razu zauważy, że punkt o współrzędnych (m_A, m_B, m_C) to ten sam punkt co punkt o współrzędnych (tm_A, tm_B, tm_C) dla dowolnego $t \neq 0$. Tak określone współrzędne (nazywa się je *barycentrycznymi*) są jednorodne – proporcjonalne układy liczb odpowiadają temu samemu punktowi. Po dłuższym namyśle można wyciągnąć stąd wniosek, że równania dowolnych tworów algebraicznych zapisane dla takich współrzędnych będą równaniami jednorodnymi, to znaczy, że każdy wielomian opisujący jakąś figurę będzie miał wszystkie wyrazy tego samego stopnia.

Dla tych, których temat zainteresował, proponuję na początek sprawdzenie, że równanie

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$$

opisuje (dla choćby jednego współczynnika różnego od zera) zbiór punktów o współrzędnych barycentrycznych (x_1, x_2, x_3) będący prostą. A także, że każda prosta ma we współrzędnych barycentrycznych takie równanie.

A dla ambitnych tematy do samodzielnej pracy: co opisują równania kwadratowe (oczywiście jednorodne), jak znaleźć równanie okręgu o danym środku i promieniu? Itd.

Marek KORDOS

Rozwiązanie zadania F 302.
Aby zniszczyć planetę rozbijając ją na „proszek" (jak to właśnie zrobił Darth Vader), trzeba dostarczyć jej energię równą co najmniej energii potencjalnej sił grawitacyjnych wiążących materię planety. Załóżmy, że Alderaan miał masę i promień równe ziemskim, tj.

$$R \simeq 6{,}4 \times 10^6 \text{ m}, \quad M \simeq 6{,}0 \times 10^{24} \text{kg}.$$

Z analizy wymiarowej wynika, że energia grawitacyjna musi być co do rzędu wielkości dana przez

$$E_G \sim -G\frac{M^2}{R}$$

(ambitni mogą sprawdzić, że o ile gęstość planety jest stała, to ścisły związek ma postać $E_G = -\frac{3}{5}G\frac{M^2}{R}$). A zatem energia zastosowana do zniszczenia Alderaana wynosiła

$$E \sim |E_G| \sim G\frac{M^2}{R} \simeq 352 \times 10^{30} \text{ J}$$

Energię taką można uzyskać detonując około 84×10^{15} megaton TNT. Jak widać, Darth Vader użył ładunku miliardy razy przekraczającego możliwości arsenałów Ziemi. Z dużą dozą prawdopodobieństwa możemy przyjąć, że potencjał całego Imperium był większy o kilka następnych rzędów wielkości.