Redakcja *Epsilona* ogłasza nieustający konkurs na temat: „Matematyka z przymrużeniem oka". Prosimy o nadsyłanie nam dowcipów matematycznych, żartów, rysunków, anegdot, wypowiedzi o matematykach itp. Szczególnie mile widziane są autentyczne cytaty z wykładów, referatów czy lekcji matematyki, zwłaszcza ilustrowane. Najciekawsze będziemy publikować. P widujemy nagrody.

O problemie izometrii

Wśród problemów matematycznych wyróżniają się takie, które mają elementarne sformułowania, ale na rozwiązania wcale nie jest łatwo wpaść. Jednym z najładniejszych przykładów jest problem izometrii, bez trudu zrozumiały przez licealistę.

Rozważmy przekształcenie płaszczyzny o następującej własności:

(*) Jeśli odległość dwóch punktów jest równa jeden, to odległość ich obrazów też wynosi jeden.

Czy takie przekształcenie musi być izometrią?

Problem kusi prostotą swej postaci, rozwiązanie jednak wcale się od razu nie nasuwa... Redakcji *Epsilona* znanych jest wielu matematyków, którzy bezskutecznie próbowali zadanie pokonać. W literaturze istnieje kilka (niezależnych) opublikowanych dowodów; najstarszy spośród nam znanych pochodzi z 1953 roku (praca Beckmana i Quarlesa w *Proceedings of the American Mathematical Society*).

Poniżej przedstawiamy ideę najprostszego chyba rozumowania. Problem, postawiony w Kole Matematyków Studentów UJ przez Edwarda Kanię, rozwiązał w 1980 r. Sławomir Kołodziej (wówczas student I roku). Oto schemat jego dowodu. Odległość (euklidesową) punktów A i B oznaczamy przez $|AB|$, badaną funkcję o własności (*) przez f, okrąg o środku P i promieniu r przez $o(P,r)$.

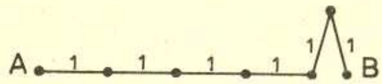
(1) Wierzchołki trójkąta równobocznego o boku 1 przechodzą w wierzchołki trójkąta równobocznego o boku 1.

(2) Jeśli $|AB| = \sqrt{3}$, to $|f(A)f(B)|$ wynosi 0 lub $\sqrt{3}$ (*wystarczy skonstruować odpowiedni romb i skorzystać z* (1)).

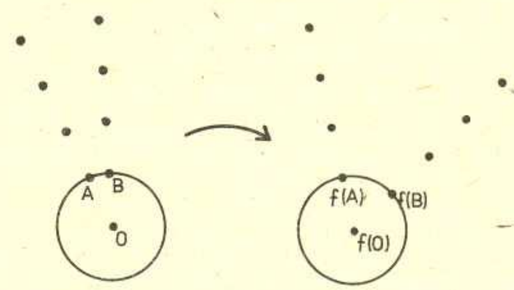
(3) Jeśli $|AB| = \sqrt{3}$, to $|f(A)f(B)| = \sqrt{3}$ (*weźmy okrąg* $o(A,\sqrt{3})$, *oraz punkty* B *i* C *leżące na tym okręgu, odległe o* 1. *Z* (2) *oraz* (*) *wynika, że* $f(B)$ *i* $f(C)$ *muszą leżeć na okręgu* $o(f(A),\sqrt{3})$).

(4) Wierzchołki „nieskończonej siatki" utworzonej przez trójkąty równoboczne o boku 1 przechodzą na wierzchołki takiej samej siatki (*co wynika bezpośrednio z* (2)). W szczególności – na dowolnej prostej, punkty odległe o liczbę całkowitą po przekształceniu leżą też na jednej prostej, w tej samej odległości.

(5) Jeśli $|AB| \le n$, to $|f(A)f(B)| \le n+1$ (*wystarczy skonstruować* $n+2$ *odpowiednich punktów odległych o jeden*).



(6) Każdy okrąg o promieniu 1 jest przekształcany izometrycznie na okrąg o promieniu 1. (*jeśli nie, to znajdziemy na okręgu* $o(P,1)$ *dwa punkty* A *i* B, *których odległość się zwiększy; ich obrazy leżą na okręgu jednostkowym o środku* $f(P)$. *Zwiększać się będzie także odległość obrazów punktów na prostych PA i PB odległych od P o tę samą liczbę całkowitą* (*korzystamy z* (4)), *co, dla punktów odpowiednio dalekich od P, przeczy własności* (5)).



Z punktu (6) łatwo już wynika, że f jest izometrią.

Na zakończenie zauważmy, że z powyższego twierdzenia błyskawicznie można otrzymać rozwiązanie zadania 9 bieżącej Olimpiady Matematycznej.

W numerze 2 *Epsilona* opowiemy o izometriach trochę więcej.

Kącik olimpijczyka

Tym, którzy mają kłopoty z rozwiązywaniem zadań olimpijskich, a także innym, którym nie zawsze udaje się przeprowadzić dowody twierdzeń, polecamy kilka niestandardowych metod dowodzenia (większość z nich pochodzi z archiwum Instytutu Matematyki Najwspółcześniejszej, o którym przy innej okazji)

- dowód przez kalendarz (*to było w zeszłym roku*),
- dowód cybernetyczny (*to automatycznie wynika z ...*),
- dowód przez ogląd (*jak łatwo widać*),
- dowód przez autorytet (*jak napisano w Delcie*),
- dowód iluzjonistyczny (*zrobimy teraz małą sztuczkę*),
- dowód przez sztuciec (*a nuż wyjdzie*)

i najbardziej efektywny

- dowód przez założenie tezy.

Galeria Jednego Cytatu

„Rząd nie może podskoczyć"

(z wykładu o rozmaitościach różniczkowych dla studentów matematyki)

EPSILON – niezależny dodatek *Delty*. Redakcja: Krzysztof Ciesielski (naczelny), Danuta Ciesielska, Sławomir Cynk, Zdzisław Pogoda, Ananiasz Pośmiechowski. Adres do korespondencji: K. Ciesielski, Instytut Matematyki UJ, Reymonta 4, 30-059 Kraków, z dopiskiem ϵ.