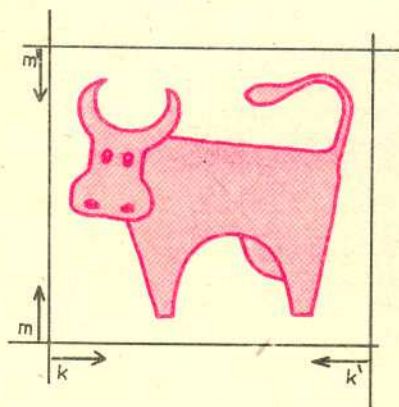
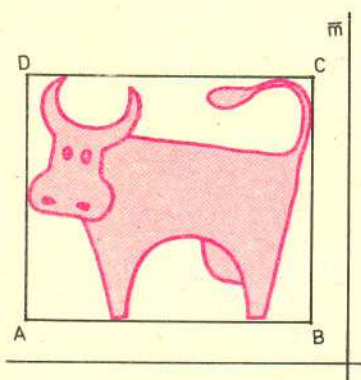


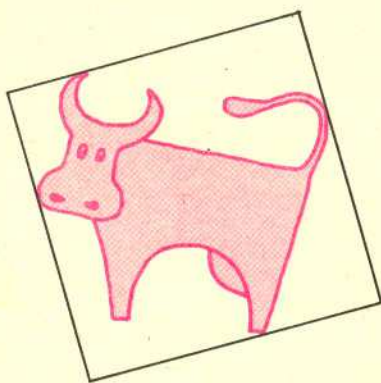
Czy krowę można wpisać w kwadrat?



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Jednym z najważniejszych pojęć matematycznych jest ciągłość. Założenie jej prowadzi do bardzo interesujących, a czasem nawet zaskakujących wniosków. Klasyczną własnością (zwaną własnością Darboux choć to nie Gaston Darboux jest jej autorem!) jest przyjmowanie wszystkich wartości pośrednich przez funkcję ciągłą na przedziale, oraz uogólnienia tego faktu. Konsekwencje tego mogą nas niejednokrotnie zaskoczyć. Oto przykład: jakąkolwiek postać (np. krowę lub kota) narysuje dziecko na kartce, zawsze można ją wpisać w kwadrat. Bardziej matematycznie: jeśli K jest krzywą zamkniętą na płaszczyźnie, to na K zawsze można opisać kwadrat.

Co to znaczy: wpisać krzywą w kwadrat lub – ogólniej – w prostokąt? Wybierzmy dowolną linię prostą m rozłączną z daną krzywą (rys. 1) i przesuвайmy ją prostopadłe do jej kierunku, aż do momentu zetknięcia się z krzywą. Następnie wybieramy taką prostą m' , równoległą do m , że krzywa leży między obiema prostymi i znów przesuваемy ją tak, by zetknęła się z krzywą. Dalej wybieramy dwie proste k i k' , prostopadłe do m , takie, by krzywa była zawarta między nimi, a następnie powtarzamy operację jak w przypadku m i m' . Otrzymane proste wyznaczają pewien prostokąt, w który krzywa będzie wpisana.

Krótko mówiąc, krzywa jest wpisana w prostokąt, gdy się w nim zawiera i z każdym z boków ma przynajmniej jeden punkt wspólny. Mając dany dowolny kierunek możemy skonstruować prostokąt, w który krzywa jest wpisana, i którego jeden z boków wyznacza tenże kierunek. Pokażemy, że zawsze można wybrać kierunek tak, by prostokąt ów był kwadratem.

Oznaczmy wierzchołki prostokąta przez A, B, C, D , tak, by bok AB był równoległy do kierunku m . Przez $f(m)$ oznaczmy długość boku AB , przez $g(m)$ długość boku AD . Niech $H(m) = f(m) - g(m)$. Prostokąt będzie kwadratem, gdy $f(m) = g(m)$, czyli $H(m) = 0$ (rys. 2).

Zauważmy, że gdy \bar{m} będzie prostą prostopadłą do m i dla niej przeprowadzimy odpowiednią konstrukcję prostokąta, to $g(\bar{m}) = f(m)$ i $f(\bar{m}) = g(m)$, czyli

$$f(\bar{m}) - g(\bar{m}) = -(f(m) - g(m)).$$

Jeśli prostą m będziemy obracać (dookoła ustalonego na niej z góry punktu), to nasz prostokąt będzie się zmieniać. Własności $H(m)$ zależą w sposób ciągły od położenia prostej m . Z przedstawionych wyżej własności wynika, że H przyjmuje wartości różnych znaków, musi więc przyjąć wartość zero. Stąd wnioskujemy, że istnieje taki kierunek m , dla którego prostokąt opisany na krzywej K jest kwadratem.

Można więc, na przykład, opisać kwadrat na rysunku krowy.

Przedstawione rozumowanie nie jest precyzyjnym dowodem, lecz jedynie jego szkicem. Dokładnego określenia wymaga dziedzina funkcji H (korzystamy z własności Darboux, więc wypada mieć przedział – gdzie on jest?). Należy formalnie uzasadnić, że funkcja H jest ciągła ...

A co z pytaniem tytułowym? Mówiliśmy o rysunku krowy. Oryginalna krowa jest jednak tworem trójwymiarowym i należałoby się raczej pytać o możliwość jej wpisania w sześcián. Jeśli już stawiamy pytania, można się zastanowić, czy w krzywą zamkniętą da się wpisać kwadrat (a w przypadku trójwymiarowym – sześcián). W ten sposób można kontynuować badanie rozmaitych, niekiedy dosyć osobliwych, własności, u podstaw których leży pojęcie ciągłości.