Środki te umożliwiają podział rozwiązywanego problemu na łatwiejsze do opanowania podproblemy. Niemniej, do naprawdę dużych zagadnień okazuje się to niewystarczające.

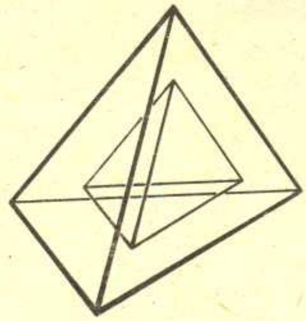
Potrzebne są zwięźlejsze i bardziej abstrakcyjne środki wyrazu, które uwalniałyby programistę od potrzeby szczegółowego opisywania rozwiązania oraz od myślenia o budowie i sposobie działania maszyny cyfrowej. Właśnie temu celowi mają służyć języki typu funkcyjnego i logicznego. Programując w nich możemy operować abstrakcyjnymi pojęciami matematycznymi. Rola maszyny ma polegać na „rozumieniu" tych abstrakcyjnych pojęć w myśl zasady, że komputer ma służyć człowiekowi, a nie na odwrót.

Dzięki zbliżeniu języków funkcyjnych i logicznych do tradycyjnego języka matematyki łatwiejsze staje się badanie własności programów. Matematyka bowiem ma już wypracowane środki do badania takich obiektów, jak zbiory, funkcje, predykaty, i mają one w niej dobrze określone znaczenia. Język matematyki może zatem służyć zarówno do zapisywania programów, jak i do opisywania jego własności.

Bylibyśmy jednak nierzetelni dostrzegając wyłącznie pozytywne strony języków funkcyjnych i logicznych. Na drodze upowszechnienia się ich zastosowań stoi bowiem poważna przeszkoda: ich komputerowe realizacje są prawie zawsze mniej efektywne od realizacji języków imperatywnych. W praktyce oznacza to, że program w języku MIRANDA albo PROLOG może na tym samym komputerze wykonywać się kilka, kilkanaście, a może nawet kilkaset razy wolniej od realizującego to samo zadanie programu w języku PASCAL, wymagając przy tym znacznie więcej pamięci. Nie powinno to dziwić, skoro w tym ostatnim przypadku szczegółowa droga dojścia do rozwiązania pochodzi od „mądrego" człowieka, a nie od „głupiej" maszyny.

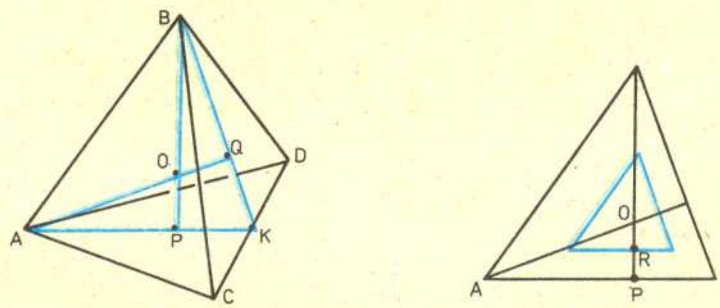
Nadzieja na przełamanie impasu w tej dziedzinie wiąże się z nową generacją tak zwanych równoległych architektur komputerów. Ich istotą jest możliwość wykonywania więcej niż jednej operacji jednocześnie przez niezależnie od siebie działające procesory. Jednak na dzień dzisiejszy architektury zorientowane na realizację języków funkcyjnych lub logicznych nie wychodzą poza laboratoria naukowców.

Wrzucanie kul



Spróbujmy w czworościanie foremnym o krawędzi 1 umieścić kulę. Jakikolwiek byłby jej promień R, jeśli rzeczywiście da się ona umieścić wewnątrz czworościanu, to jej środek będzie się znajdował wewnątrz mniejszego czworościanu foremnego, którego krawędź jest już przez R wyznaczona.

Istotnie, mniejszy czworościan to zbiór tych wszystkich punktów większego czworościanu, których odległość od ścian jest nie mniejsza od R. Spróbujmy obliczyć długość a krawędzi mniejszego czworościanu. W tym celu zauważmy, że oba czworościany są jednokładne i środek jednokładności jest (między innymi) ich środkiem ciężkości. Odcinki łączące środek ciężkości ściany dowolnego czworościanu z przeciwległym wierzchołkiem są dzielone przez ten środek w stosunku 1 : 3 (dlaczego?) i wobec tego odległość środka ciężkości od ściany czworościanu wynosi $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot$ długość krawędzi (proszę samemu przeprowadzić obliczenia).



$CK = \frac{1}{2}AB,\ AK = \frac{\sqrt{3}}{2}AB,\ AP = \frac{\sqrt{3}}{3}AB,\ BP = \sqrt{\frac{2}{3}}AB,\ OP = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}AB$

Rozpatrując odpowiedni przekrój obu czworościanów stwierdzamy, że

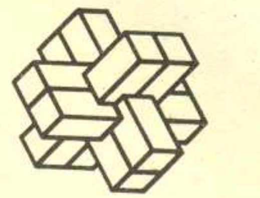
$$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot a = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}} - R,$$

co daje ostatecznie

$$(*)\qquad a = 1 - 2\sqrt{6}R.$$

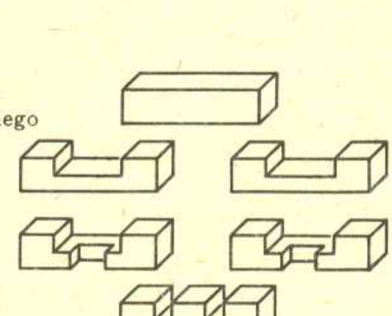
Do czego ten rezultat może się przydać?

Krzyżak znacznie prościej



Pan Krzysztof Sitko z Tarnowa nadesłał nam inny sposób rozkładu krzyżaka na sześć klocków. Przypominamy: chodzi o tak wycięte z prostopadłościennych patyczków klocki, by dał się z nich złożyć krzyżak nie rozpadający się i nie mający luk we wnętrzu (por. *Delta* 7/1990).

Na rysunku obok przedstawiamy propozycję pana Sitko.



Jest ona o wiele prostsza od oryginalnego rozwiązania litewskiego i łatwo się domyślić, jak z takich klocków złożyć krzyżak. Tyle że można sądzić, iż Litwini specjalnie skomplikowali rozkład krzyżaka, by utrudnić życie składającemu.

Kącik Prac Uczniowskich ukazuje się w *Delcie* od numeru 3/1988 (z przerwami: *Delta* 6, 12/1988, 1, 6, 7, 8/1989, 6/1990 i 1/1991). Zawiera on propozycje ewentualnych tematów na Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki. Oczywiście, chętnie widzimy także prace na inne tematy.

Otóż do rozwiązywania następującego zadania:
W czworościanie foremnym o krawędzi 1 umieszczono n jednakowych kul. Jaki może być ich największy promień $r(n)$?

Np. dla $n = 2$. Szukamy w małym czworościanie dwóch najodleglejszych punktów – ich odległość to maksymalna średnica jednakowych, nie przecinających się kul, które mają w nich środek. Konkretnie mamy więc (bo w czworościanie najodleglejszymi punktami są jego wierzchołki) $2R = a$. Stąd rozwiązaniem naszego zadania jest rozwiązanie równania

$$2R = 1 - 2\sqrt{6}\cdot R,$$

a więc

$$R = \frac{1}{2(1+\sqrt{6})} = r(2).$$

A dla większych n? Szukamy takich n punktów w małym czworościanie, by najmniejsza z odległości między nimi była maksymalna. Przypuśćmy, że znaleźliśmy tę odległość i wynosi ona $f(n)$ – np. $f(2) = a$. Rozwiązaniem naszego zadania będzie pierwiastek równania $(*)$, w którym zamiast a podstawimy wartość obliczoną z zależności $2R = f(n)$ – można to zrobić, bo dla ustalonego n wartość $f(n)$ zależy tylko od a.

Mimo istnienia tak konkretnego przepisu znajdowanie wartości $r(n)$ jest trudne. Tak trudne, że nie tylko podanie ogólnej formuły, lecz także wyliczenie konkretnych wartości dla n do – powiedzmy – dwudziestu jest otwartym i wartościowym (w skali naukowej matematyki) problemem.

Przy okazji ciekawostka: $r(2) = r(3) = r(4)$. Sądzę, że każdy z Czytelników z łatwością to zauważy.

Jako temat samodzielnej (i, jeszcze raz to podkreślę, naukowo wartościowej) pracy polecam obliczanie wartości $r(n)$, a także rozwiązywanie analogicznego zadania dla sześcianu czy któregoś z pozostałych wielościanów foremnych.

M. K.

Okazuje się zatem, że podczas gdy przemysł elektroniczny narzeka na kryzys w dziedzinie oprogramowania, informatycy mają podstawy, by narzekać na elektronikę, która nie jest w stanie sprostać wymaganiom stawianym przez nowoczesne oprogramowanie. A co z tego może wyniknąć? Oczywiście – postęp.

Dodatek nadzwyczajny

Metoda generowania trójek pitagorejskich zastosowana w przytoczonych programach nie jest optymalna. Można uzyskać rozwiązania biorąc takie trójki liczb naturalnych k, l i m, że $k < l$ i $m(k^2 + l^2) \leq M$. Dla każdej takiej trójki możemy wyznaczyć rozwiązanie bezpośrednio ze wzorów:

$$a = m(l^2 - k^2),\ b = 2mkl,\ c = m(k^2 + l^2).$$

Wydaje się to najefektywniejszą z możliwych, a w dodatku dla małych wartości M nie wymagającą użycia komputera, metodą znajdywania trójek. Na dodatek staje się jasne, że trójek pitagorejskich jest nieskończenie wiele, bowiem tyle jest trójek liczb: m, l, k.

Uwagę tę zamieszczamy dla zaspokojenia tych Czytelników, którzy lubią rozwiązania optymalne, a zarazem ku przestrodze tym, którzy bezgranicznie wierzą w możliwości komputera.

Odpowiedzi na postawione w tekście pytania są następujące:

prawda;
$X =$ „Jan", $X =$ „Dariusz",
$X =$ „Małgorzata", $X =$ „Roman";
$Y =$ „Małgorzata", $Y =$ „Jan",
$Y =$ „Beata";
wszystkie 8 możliwych takich par X, Y, że X oznacza potomka Y.

Regulamin Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki

1. Konkurs organizowany jest corocznie przez Zarząd Główny Polskiego Towarzystwa Matematycznego i Redakcję miesięcznika *Delta*, przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.
2. W konkursie mogą brać udział uczniowie wszystkich typów szkół.
3. Konkurs składa się z eliminacji i finału.
4. W eliminacjach bierze udział uczeń, który w terminie do dnia 1 maja prześle pod adresem Redakcji *Delty* jeden egzemplarz swojej pracy matematycznej. Do pracy należy dołączyć następujące informacje: adres prywatny autora, klasa, nazwa i adres szkoły, imię, nazwisko i adres nauczyciela – opiekuna pracy.
5. Praca powinna zawierać samodzielny wkład ucznia i pełną informację o źródłach, z których korzystał jej autor. Prace czysto kompilacyjne nie będą dopuszczone do finału konkursu.
6. Prace nadesłane na eliminacje zostaną ocenione przez Komisję Konkursu i kompetentnych recenzentów. Te spośród prac, które spełniają warunki konkursu, zostaną przedstawione Jury Konkursu. Jury zakwalifikuje najlepsze prace do finału, który odbędzie się w trakcie dorocznej Sesji Naukowej Polskiego Towarzystwa Matematycznego.
7. Zawiadomienia o zakwalifikowaniu do finału zostaną przesłane autorom prac oraz nauczycielom – opiekunom prac przed końcem roku szkolnego.
8. Finaliści i nauczyciele opiekujący się ich pracami otrzymują od Zarządu Głównego PTM zaproszenie do udziału w Sesji na koszt Towarzystwa.
9. Finał polega na wygłoszeniu (nie na odczytaniu) przez ucznia, podczas specjalnego otwartego posiedzenia Sesji, referatu (trwającego nie dłużej niż 15 minut) i wzięciu udziału w dyskusji na temat, któremu poświęcona była praca.
10. Rezultaty finału oceni Jury Konkursu. Jury będzie brało pod uwagę, oprócz merytorycznej wartości pracy, również samodzielność i oryginalność ujęcia tematu oraz przebieg referatu i dyskusji. Jury przyznaje medale: złoty, srebrny i brązowy, wyróżnienia oraz nagrody pieniężne ufundowane przez Ministerstwo Edukacji Narodowej.
11. Ogłoszenie wyników finału następuje w trakcie Walnego Zgromadzenia Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Medale wręcza Prezes Towarzystwa. Wszyscy uczestnicy finału otrzymują dyplomy.
12. Wyniki konkursu i skrót zwycięskiej pracy będą opublikowane w miesięczniku *Delta*.
13. Komisję Konkursu oraz Jury Konkursu powołuje Zarząd Główny PTM na wniosek Komitetu Redakcyjnego *Delty*.