Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**.
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 7/1990.

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 V 1991

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 201 (WT=2,06) i 202 (WT=1,57)
z numeru 5/1990

Henryk Kornacki	– Augustów	46,82
Adam Czornik	– Bytom	45,99
Jerzy Małopolski	– Kraków	44,49
Adrian Langer	– Nisko	42,38
Paweł Kubit	– Krosno	36,74
Tomasz Grzesiak	– Kraków	36,41

Szeregi Klubu 44 M zasilili panowie Kornacki i Czornik. Pan Małopolski zgromadził 44 punkty już powtórnie (wracając do zmagań ligowych po dłuższej przerwie). Witamy!

Zadania z matematyki nr 215, 216

Redaguje Marcin E. KUCZMA

215. Wyznaczyć wszystkie takie punkty P leżące wewnątrz kwadratu $ABCD$, że

$$|\angle PAB| + |\angle PBC| + |\angle PCD| + |\angle PDA| = 180^\circ .$$

216. Udowodnić, że reszta z dzielenia liczby naturalnej n przez liczbę naturalną $k > 1$ równa się

$$\frac{k-1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k-1} \frac{\sin \frac{j}{k}(2n+1)\pi}{\sin \frac{j}{k}\pi} .$$

Zadanie 216 zaproponował pan Andrzej Paszkiewicz z Zegrza.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 10/1990

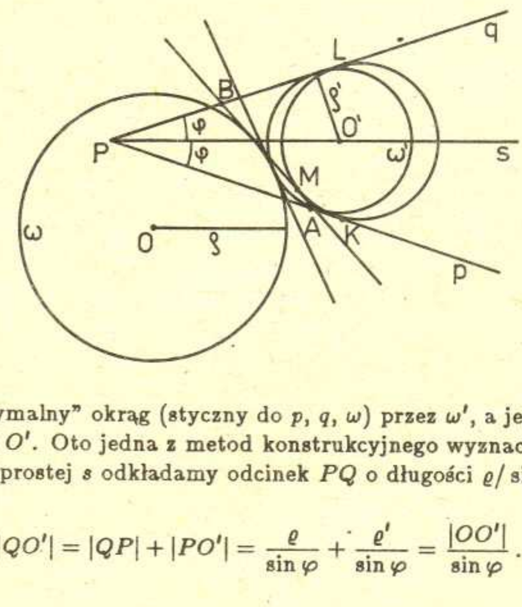
Przypominamy treść zadań:

211. Na płaszczyźnie dane są dwie półproste o wspólnym początku P (nie zawarte w jednej prostej) oraz koło zawierające punkt P w swoim wnętrzu. Wyznaczyć konstrukcyjnie trójkąt o minimalnym obwodzie mający dwa boki zawarte w danych półprostych, a trzeci bok styczny do danego koła.

212. Znaleźć ogólną postać funkcji wymiernej $F \not\equiv 0$, spełniającej równanie $F(x) = F\left(\frac{1}{x}\right)$ (dla wszystkich x, dla których obie strony mają sens).

211. Dwie dane półproste oznaczmy przez p i q, dany okrąg – przez ω; jego środek i promień – przez O i ϱ; rozwartość kąta (wypukłego) między p i q – przez 2φ; półprostą dwusieczną tego kąta – przez s.

Niech PAB będzie dowolnym trójkątem o wierzchołkach $A \in p$, $B \in q$, o boku AB stycznym do ω. Weźmy pod uwagę okrąg dopisany, styczny do przedłużeń boków PA, PB oraz do boku AB odpowiednio w punktach K, L, M (rysunek 1). Obwód trójkąta PAB równa się $|PA| + |PB| + |AM| + |BM| = |PK| + |PL| = 2|PK|$, a więc jest minimalny wtedy, gdy rozważany okrąg dopisany leży możliwie najbliżej punktu P – czyli gdy jest zewnętrznie styczny do okręgu ω. Prosta AB jest wówczas wspólną styczną obu okręgów.



Rys. 1

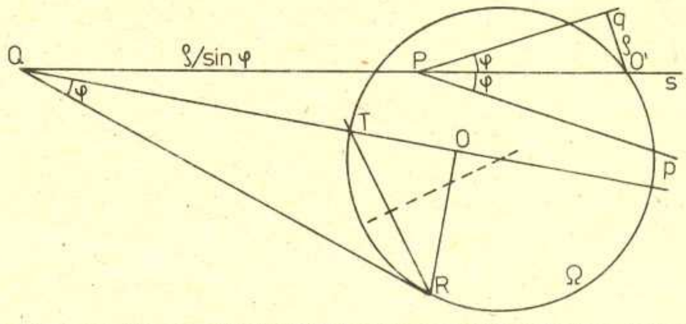
Oznaczmy ten „optymalny” okrąg (styczny do p, q, ω) przez ω', a jego promień i środek – przez ϱ' i O'. Oto jedna z metod konstrukcyjnego wyznaczenia punktu O'. Na przedłużeniu półprostej s odkładamy odcinek PQ o długości $\varrho/\sin\varphi$ (rysunek 2). Wówczas

$$|QO'| = |QP| + |PO'| = \frac{\varrho}{\sin\varphi} + \frac{\varrho'}{\sin\varphi} = \frac{|OO'|}{\sin\varphi} .$$

Zbiór

$$\Omega = \left\{X : \tfrac{|OX|}{|QX|} = \sin\varphi\right\}$$

jest okręgiem o środku leżącym na prostej OQ (okrąg Apoloniusza). Punkt O' leży na tym okręgu; natomiast punkt P leży wewnątrz niego (bo $|OP| < \varrho$, $|QP| = \varrho/\sin\varphi$).



Rys. 2

Po dowolnie wybranej stronie odcinka OQ budujemy trójkąt OQR o kątach $|\angle OQR| = \varphi$, $|\angle ROQ| = 90°$ i prowadzimy dwusieczną kąta QRO do przecięcia z przyprostokątną OQ w punkcie T. Z proporcji $|OT|/|QT| = |OR|/|QR| = \sin\varphi$ wynika, że $R, T \in \Omega$. Zatem środek okręgu Ω znajdujemy na przecięciu prostej OQ z symetralną odcinka RT. Kreślimy ten okrąg i w przecięciu z półprostą s otrzymujemy poszukiwany punkt O' (drugi punkt przecięcia z prostą PQ leży poza półprostą s, skoro P leży wewnątrz Ω). Punkt, w którym odcinek OO' przecina okrąg ω, jest punktem styczności okręgów ω i ω'; prosta styczna do ω w tym punkcie wyznacza żądany trójkąt o minimalnym obwodzie.

212. Wielomian $P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ ($\not\equiv 0$) nazwiemy *palindromicznym*, gdy

(1) $\qquad a_j = a_{n-j} \quad$ dla $j = 0, \ldots, n$.

(Uwaga: P nie musi być stopnia n; na przykład $P(x) = 2x^5 - 3x^4 + 2x^3$ spełnia (1) dla $n = 8$: dziewięciowyrazowy ciąg współczynników ma w tym przykładzie postać $(0,0,0,2,-3,2,0,0,0)$.)

Dwa wielomiany P i Q nazwiemy *jednakowo palindromicznymi*, jeśli warunek (1) jest spełniony dla nich obu, i to z tym samym n. Jest widoczne, że wówczas funkcja $F = P/Q$ spełnia równanie $F(x) = F(1/x)$.

Wykażemy, że i na odwrót: jeśli funkcja F, będąca nieskracalnym ilorazem wielomianów P i Q, spełnia to równanie, to wielomiany P i Q są jednakowo palindromiczne. Będzie to więc żądana charakteryzacja funkcji F.

Niech $n = \max(\deg P, \deg Q)$; $\deg P$ oznacza stopień wielomianu P. Przyjmijmy $P^*(x) = x^nP(1/x)$, $Q^*(x) = x^nQ(1/x)$. Wielomiany P^* i Q^* są względnie pierwsze (podobnie jak P i Q), tzn. nie mają wspólnego pierwiastka zespolonego; istotnie: gdyby miały wspólny pierwiastek $z_0 \neq 0$, to liczba $1/z_0$ byłaby wspólnym pierwiastkiem wielomianów P i Q; także $z_0 = 0$ nie jest wspólnym pierwiastkiem P^* i Q^*, bowiem któryś z wielomianów P, Q ma stopień n.

Z równości $F(x) = F(1/x)$ (dla $F = P/Q$) wynika równość $PQ^* = QP^*$. Skoro zaś wielomian P jest względnie pierwszy z Q, a P^* jest względnie pierwszy z Q^*, z jednoznaczności rozkładu wielomianu na czynniki wynika, że $P^* = \lambda P$, $Q^* = \lambda Q$ dla pewnej stałej $\lambda \neq 0$. Zatem, w szczególności, $P(1) = \lambda P(1)$, $Q(1) = \lambda Q(1)$. Co najmniej jedna z liczb $P(1)$, $Q(1)$ nie jest zerem. Tak więc $\lambda = 1$ i otrzymujemy równość $P^* = P$, $Q^* = Q$, oznaczającą dokładnie to, że wielomiany P i Q są jednakowo palindromiczne, z $n = \max(\deg P, \deg Q)$.

Zadania z fizyki nr 113, 114

Redaguje Jerzy BROJAN

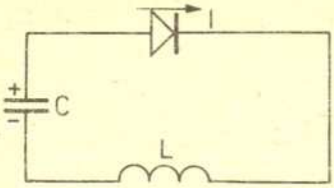
113. Akceleratory cząstek elementarnych są – jak wiadomo – urządzeniami wielkimi i kosztownymi. Opisany niżej (nieopatentowany!) wynalazek pozwala nadawać elektronom wielką energię znacznie taniej i prościej. Uderzamy w kulę bilardową kierując ją w stronę spoczywającej kuli o dwa razy mniejszej masie, tak, aby zderzenie było centralne (kule po zderzeniu biegną wzdłuż tej samej prostej). Kula uderzona trafia z kolei w następną kulę jeszcze dwa razy lżejszą, itd., itd., ..., a na końcu znajduje się elektron. Ostatni stosunek mas będzie liczbą zawartą pomiędzy 1 a 2. Zakładając, że wszystkie zderzenia są centralne i doskonale sprężyste, oraz przyjmując masę kuli bilardowej 0,2 kg i jej prędkość początkową 1 m/s, oblicz numerycznie energię kinetyczną uzyskaną przez elektron (oczywiście, w ramach mechaniki relatywistycznej). Masa elektronu wynosi $9,11 \cdot 10^{-31}$ kg, prędkość światła $c = 2,9979 \cdot 10^8$ m/s.

114. W jednorodnym polu magnetycznym o indukcji wynoszącej początkowo 5 T i malejącej liniowo do zera w ciągu 0,4 s znajduje się prostopadła do pola pętla (obwód kołowy) o promieniu 10 cm, wykonana z przewodnika o oporze 0,1 Ω i wytrzymałości na rozerwanie 2 N. Czy pętla ulegnie rozerwaniu?

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 10/1990

Przypominamy treść zadań:

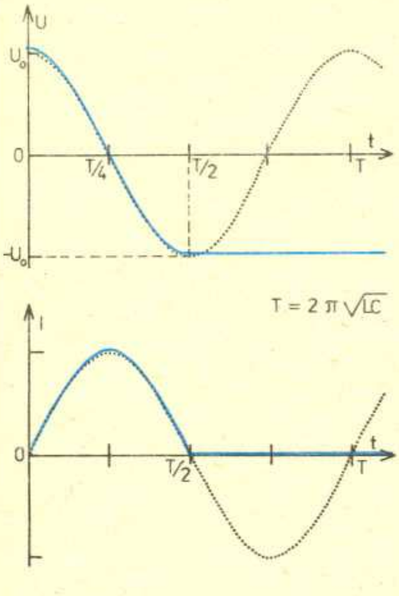
109. Obwód składa się z diody, kondensatora C, cewki L (rys. 1). Między okładkami kondensatora panuje napięcie U_0. Znaleźć napięcie na kondensatorze oraz natężenie prądu płynącego w obwodzie po upływie czasu t od zamknięcia wyłącznika.



Rys. 1

110. Kula A o promieniu r spada na unieruchomioną kulę B o promieniu R i wielokrotnie się od niej odbija. W chwili początkowej środek kuli A znajduje się na wysokości $h \gg R+r$ nad środkiem kuli B i w odległości $\varepsilon \ll R+r$ od prostej pionowej przechodzącej przez środek tej kuli. Znaleźć współrzędną poziomą środka kuli A po k odbiciach.

109. Po zamknięciu obwodu popłynie przezeń prąd w kierunku oznaczonym strzałką (dodatnia wartość natężenia prądu I), który jest kierunkiem przewodzenia diody. Wobec zaniedbywalnego oporu diody nasz obwód jest równoważny prostemu obwodowi LC (bez diody). Jak wiadomo, w takim obwodzie zachodzą drgania rezonansowe o okresie $T = 2\pi\sqrt{LC}$. Zależności czasowe napięcia U na kondensatorze oraz natężenia prądu I płynącego w obwodzie rezonansowym przedstawiają linie kropkowane na rys. 2. Ponieważ w obwodzie z diodą prąd nie może płynąć w kierunku zaporowym, zatem w chwili $t = \pi\sqrt{LC}$ prąd przestanie płynąć, a napięcie na kondensatorze pozostanie stałe, równe $-U_0$. Odpowiednie zależności czasowe napięcia na kondensatorze i natężenia prądu w omawianym obwodzie przedstawiają krzywe na rys. 2 wykreślone linią kolorową.



Rys. 2

110. Oznaczmy różnicę współrzędnych poziomych środków obu kul przy k-tym przesunięciu przez x_k (czyli x_1 to zadana odległość początkowa ε). Będziemy rozpatrywać tylko tę fazę ruchu kulki, w której jej przesunięcie poziome jest małe w porównaniu z $R+r$, czyli z pominięciem odbić końcowych. Zakładamy więc, że pozioma składowa prędkości jest bardzo mała w porównaniu z maksymalną wartością składowej pionowej, czyli że wysokość, którą osiąga kulka, pozostaje po każdym odbiciu jednakowa i równa h, a odstęp czasu między odbiciami jest stale równy $t \approx 2\sqrt{\frac{2h}{g}}$.

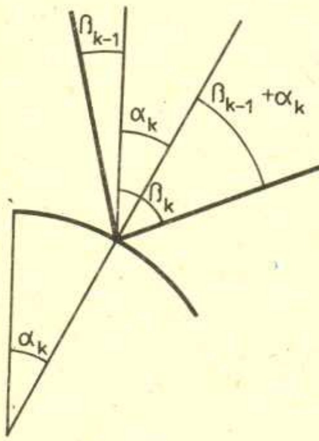
Oznaczmy:

v – pionowa składowa prędkości w momencie odbicia, $v \approx \sqrt{2gh}$,

v_k – pozioma składowa prędkości po k–tym odbiciu, v_0 – przed pierwszym odbiciem (z warunku początkowego mamy $v_0 = 0$),

$\alpha_k \approx \frac{x_k}{R+r}$ (zob. rys. 3) – kąt, jaki tworzy z pionem prostopadła do powierzchni kuli B w k–tym punkcie odbicia,

$\beta_k \approx \frac{v_k}{v}$ – kąt, jaki tworzy z pionem prędkość po k–tym odbiciu, czyli przed $(k+1)$–szym odbiciem.



Rys. 3

Przyrównując kąt padania (równy $\beta_{k-1} + \alpha_k$) do kąta odbicia otrzymujemy:

$$\beta_k = 2\alpha_k + \beta_{k-1},$$

czyli

$$v_k \approx v_{k-1} + 2\frac{vx_k}{R+r}. \tag{1}$$

Dołączając do tego tożsamość

$$x_k = x_{k-1} + v_{k-1}t \tag{2}$$

mamy parę równań rekurencyjnych pozwalających z początkowych danych $x_1 = \varepsilon$, $v_0 = 0$ znaleźć kolejne wartości x_k i v_k:

$$v_1 \approx \frac{2v\varepsilon}{R+r},$$

$$x_2 \approx \varepsilon + \frac{2vt\varepsilon}{R+r},$$

$$v_2 \approx \frac{2v\varepsilon}{R+r} + \frac{2v\varepsilon}{R+r} + \left(\frac{2v}{R+r}\right)^2 t\varepsilon.$$

Zauważmy, że $vt \approx \sqrt{2gh}\cdot 2\sqrt{\frac{2h}{g}} = 4h$, zatem z założenia $h \gg R+r$ wynikają przybliżenia:

$$v_k \approx \left(\frac{8h}{R+r}\right)^k \cdot \frac{1}{t}\cdot\varepsilon, \qquad x_k \approx \left(\frac{8h}{R+r}\right)^{k-1}\cdot\varepsilon.$$

Nietrudno skonstruować program komputerowy obliczający tor kulki ściśle, tzn. bez zakładania, że kąty są małe, ani że $h \gg R+r$. Na przykład, dla $\varepsilon = 10^{-5}$, $R+r = 30$, $h = 135$ otrzymuje się $x_2 = 37\varepsilon$, $x_3 = 1405\varepsilon$, $x_4 = 53350\varepsilon$, $x_5 = 20,54\cdot 10^5\varepsilon$ (dla porównania: $\frac{8h}{R+r} = 36$, $(\frac{8h}{R+r})^2 = 1296$, $(\frac{8h}{R+r})^3 = 46656$).

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 103 (WT=1,55) i 104 (WT=1,30) z numeru 7/1990

Przemysław Gworys	– Częstochowa	45,13
Andrzej Borowski	– Aleksandrów Kuj.	44,99
Leszek Motyka	– Kraków	39,13
Paweł Perkowski	– Szczecin	23,25
Dzierżysław Lipniacki	– Lublin	22,72

Panowie Gworys i Borowski zostają członkami Klubu 44F (z numerami szesnastym i siedemnastym).