Złoty medal dla Polski

W 1784 roku Berlińska Akademia Nauk, z inicjatywy Josepha Louisa Lagrange'a, ogłosiła konkurs na wyjaśnienie sprawy podstaw analizy matematycznej. Dokładniej: chodziło o podanie zadowalającego określenia różniczkowania i całkowania. Fakt ten może zdziwić: minęło już prawie 120 lat od czasu, gdy Newton za pomocą tych narzędzi wyprowadził (i wprowadził) prawo powszechnego ciążenia; były do dyspozycji wspaniałe prace Leibniza, Bernoullich, Eulera; sam Lagrange wykładał już rachunek różniczkowy i całkowy od 29 lat. I tu nagle taki konkurs. Dlaczego? Aby to wyjaśnić, przyjrzyjmy się stosowanym do tego czasu metodom np. różniczkowania.

Izaak Newton postępował tak. Różniczkowaniu u niego podlegały tylko równania. Aby zróżniczkować równanie, należało występujące w nich zmienne, np. x i y, zastąpić przez (odpowiednio) $x + o\dot{x}$ i $y + o\dot{y}$. Po tym zastąpieniu należy nowo otrzymane równanie uprościć stosując przy tym dwie reguły:

1° jeśli wszystkie wyrazy zawierają o, to należy równanie podzielić stronami przez o,

2° jeśli niektóre wyrazy nie zawierają o, to wyrazy zawierające o należy pominąć.

Obejrzyjmy to na przykładzie (autentycznym, z pracy Newtona): różniczkujemy równanie

$$(*) \qquad x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0 .$$

Po wskazanym podstawieniu mamy

$$x^3 + 3x^2\dot{x}o + 3x\dot{x}^2o^2 + \dot{x}^3o^3 - ax^2 - 2ax\dot{x}o - a\dot{x}^2o^2 + axy +$$
$$+ ay\dot{x}o + ax\dot{y}o + a\dot{x}\dot{y}o^2 - y^3 - 3y^2\dot{y}o - 3y\dot{y}^2o^2 - \dot{y}^3o^3 = 0 ,$$

co, wobec $(*)$, jest równoważne równaniu

$$3x^2\dot{x}o + 3x\dot{x}^2o^2 + \dot{x}^3o^3 - 2ax\dot{x}o - a\dot{x}^2o^2 +$$
$$+ ay\dot{x}o + ax\dot{y}o + a\dot{x}\dot{y}o^2 - 3y^2\dot{y}o - 3y\dot{y}^2o^2 - \dot{y}^3o^3 = 0 .$$

Można więc zastosować 1°, co daje

$$3x^2\dot{x} + 3x\dot{x}^2o + \dot{x}^3o^2 - 2ax\dot{x} - a\dot{x}^2o + ay\dot{x} +$$
$$+ ax\dot{y} + a\dot{x}\dot{y}o - 3y^2\dot{y} - 3y\dot{y}^2o - \dot{y}^3o^2 = 0 .$$

i, po zastosowaniu 2°,

$$3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} + ax\dot{y} - 3y^2\dot{y} = 0 .$$

Taki jest ostateczny wynik.

NORSKE LÖWE

Przytoczyłem konkretny przykład, bo nic z tego, co stosujemy dzisiaj, jego metod nie przypomina. Wynik jest taki, jaki uzyskalibyśmy i dziś przy założeniu, że x i y są funkcjami różniczkowalnymi jakiegoś (nieujawnionego) parametru i przy różniczkowaniu względem niego.

Różniczkowanie Newtona budziło opory już u współczesnych i tylko nieliczni jego uczniowie (np. Maclaurin) usiłowali kontynuować tę linię. Wyniki jednak, uzyskane za pomocą tego różniczkowania, były wspaniałe, więc nikt nie próbował tych metod odrzucić, ale intensywnie szukano jakiegoś, dającego się matematycznie obronić, sposobu na uzyskiwanie otrzymanych przez Newtona rezultatów. Sam Newton zresztą też miał poważne wątpliwości co do matematycznej zasadności swoich metod i jego pracę na ten temat opublikowali dopiero jego uczniowie w 10 lat po jego śmierci.

FRYDERYK WILHELM

Formalizm, którego używamy dziś, jest autorstwa, nieco młodszego od Newtona, **Gottfrieda Wilhelma Leibniza**. Ten już różniczkuje funkcje i robi to formalnie tak, jak dziś czynią to bezmyślni uczniowie szkół średnich. Za tym formalizmem kryje się bardzo mocne założenie filozoficzne: każda liczba rzeczywista jest wyposażona w otoczenie (na osi liczbowej) zwane monadą, nie zawierające żadnej innej liczby rzeczywistej (Leibniz oznaczał je $(x - \mathrm{d}x; x + \mathrm{d}x)$). I znów był to chwyt dla ortodoksyjnych matematyków nie do strawienia (gwoli sprawiedliwości trzeba dodać, że idea monad wróciła do matematyki za sprawą Kleina gdzieś około roku 1900, a zadomowiła się w niej na dobre za sprawą Abrahama Robinsona czterdzieści lat temu jako analiza niestandardowa).

Reguły rachunku na monadach bardzo w istocie przypominały chwyty Newtona. Leibniz wypisuje zresztą zasady „szczególnego dla nich rodzaju rachunku". Np.

$$a + n\mathrm{d}x = a , \quad \mathrm{d}x \pm (\mathrm{d}x)^{n+1} = \mathrm{d}x , \quad a\sqrt{\mathrm{d}x} + b\mathrm{d}x = a\sqrt{\mathrm{d}x} , \quad \text{itp.}$$

Potrzebujący wiele analizy w swoich pracach, sześćdziesiąt lat młodszy **Leonhard Euler**, używa innej metody. Oczywiste spostrzeżenie, że $a \cdot 0 = 0$, każe mu napisać

$$\frac{0}{0} = a$$

i (ponieważ a jest dowolne) zastanawiać się nad tym, jak z zera wyłączać czynniki. Konkretnie, proponuje z licznika i mianownika ułamka $\frac{0}{0}$ wyłączać dotąd „jednakowe zera" (i skracać je), aż bądź licznik, bądź mianownik przestanie być zerem. Ma to oczywiste zastosowanie dla tzw. ilorazu różnicowego. Np.

$$\left.\frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0}\right|_{x_0} = \left.\frac{(x - x_0)(x + x_0)}{(x - x_0) \cdot 1}\right|_{x_0} = \left.\frac{x + x_0}{1}\right|_{x_0} = 2x_0 ,$$

skąd wniosek, że $(x^2)' = 2x$.

I znów każdy nauczyciel licealny przyzna, że ma w swojej klasie wielu Eulerów. Ale matematycy (przy całym szacunku dla rezultatów Eulera) nie mogli jednak przystać na teorię „różnych zer".

Młodszy z kolei o trzydzieści lat od Eulera **Lagrange** proponował inny sposób. Rozwijał on przez umiejętne, wręcz artystyczne, szacowanie funkcję na szereg potęgowy. I jeśli znalazł współczynniki a_i szeregu

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k ,$$

to pisał, że

$$(\nabla) \qquad f^{(k)}(0) = k!\, a_k ,$$

zgodnie z udowodnionym (na gruncie jeszcze techniki newtonowskiej) w 1742 roku przez Colina Maclaurina wzorem

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k .$$

Wzór (∇) pozwala (choć to znów artystyczna robótka) znajdować pochodne wszelkich rozwijalnych w szereg potęgowy funkcji. Tu już nic nie można zarzucić, ale wykonanie rozkładu na szereg jest rzeczą niezwykle trudną (por. *Delta* 4/1989, artykuł *Bez pochodnych*).

Konkurs trwał dwa lata. Jury (pod przewodnictwem Lagrange'a) przyznało pierwszą nagrodę pracy, w której usiłowano sprecyzować ideę granicy. Pomysł granicy został opublikowany w Encyklopedii francuskiej przez (zmarłego na rok przed ogłoszeniem konkursu) Jeana le Rond d'Alemberta – była to jednak tylko ledwie zarysowana idea.

Autorem nagrodzonej pracy był Szwajcar, Simon l'Huilier. Dlaczego więc napisałem, że zwycięstwo było polskie? Otóż l'Huilier pracował w Polsce – był bibliotekarzem króla Stanisława Augusta Poniatowskiego. Jego wykształcenie matematyczne było zresztą doceniane przez Polaków – to jemu właśnie (dziesięć lat przed konkursem) Komisja Edukacji Narodowej powierzyła napisanie szkolnych podręczników matematyki, z którego to zadania wywiązał się znakomicie.

Co zaś się tyczy nagrodzonej pracy, to nie odegrała ona praktycznie żadnej roli w uściślaniu analizy. Sam przewodniczący jury w wydanej w 1797 roku *Théorie des fonctions analytiques* używa nadal swojej techniki rozwijania w szereg. Na uściślenie podstaw analizy trzeba było poczekać aż na Carla Weierstrassa, który w latach sześćdziesiątych XIX wieku zrealizował idee Augustina Louisa Cauchy'ego sprowadzenia podstawowych problemów analizy do arytmetyki liczb rzeczywistych, a konkretnie do rozwiązywania nierówności z wartością bezwzględną.

Marek KORDOS