Heinrich Olbers (1758–1840)

Przełom XVIII i XIX wieku to okres działalności takich „olbrzymów”, jak William Herschel, Carl Friedrich Gauss, Friedrich Bessel czy Pierre Simon de Laplace. Mniej znaną postacią jest Heinrich Olbers, lekarz (chyba musiał być niezłym lekarzem, skoro w 1811 r. dostał od Napoleona nagrodę za rozprawę o chorobach skórnych). Zajmował się ponadto astronomią, która z biegiem czasu wyparła z jego życia medycynę. Olbers żył w czasach, gdy teoria grawitacji Newtona była już dobrze ugruntowana, ale jeszcze zbierane były cegiełki do budowy nowoczesnej mechaniki nieba – wielkich syntez w tej dziedzinie dokonali na początku XIX w. Laplace i Gauss. Olbers wsławił się właśnie dostawieniem jednej takiej cegiełki – opracowaniem metody wyznaczania elementów orbity nieznanego obiektu (np. nowej komety) z trzech obserwacji. Jego metoda narzucała przy tym jeden warunek: wyznaczana orbita była z założenia paraboliczna. Było to o tyle usprawiedliwione, że orbity komet nieokresowych są rzeczywiście niemal paraboliczne.

Problem wyznaczenia elementów orbity jest w istocie zagadnieniem rachunkowym, bowiem jego idea jest bardzo prosta. Z Ziemi można zaobserwować tylko kierunek do komety, określony np. w układzie współrzędnych równikowych przez cosinusy kierunkowe l, m, n. Odległość komety ϱ jest nie znana. Uważamy tu za znane (bo zawsze można je obliczyć) współrzędne geocentryczne Słońca X, Y, Z. Wtedy współrzędne heliocentryczne komety x, y, z są równe

$$\begin{aligned} x &= \varrho l - X, \\ y &= \varrho m - Y, \\ z &= \varrho n - Z, \end{aligned} \tag{1}$$

co wynika ze zwykłego „dodawania” boków trójkąta utworzonego przez Ziemię, Słońce i kometę. W tych współrzędnych x, y, z uwikłane są elementy orbity w ogólności w liczbie sześciu, a ponieważ, jak wspomnieliśmy, ϱ też jest nie znane, więc dopiero mając 3 obserwacje (czyli 3 zestawy po 3 takie równania dla trzech momentów t_1, t_2, t_3) dysponujemy dziewięcioma równaniami na 9 niewiadomych, którymi są elementy orbity oraz ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3.

Drugi banalny fakt wykorzystywany w tym zagadnieniu to ten, że heliocentryczne wektory wodzące komety leżą w jednej płaszczyźnie. Wobec tego np. współrzędne w drugiej chwili będą kombinacją liniową współrzędnych w chwili pierwszej i trzeciej:

$$\begin{aligned} x_2 &= N_1 x_1 + N_3 x_3, \\ y_2 &= N_1 y_1 + N_3 y_3, \\ z_2 &= N_1 z_1 + N_3 z_3. \end{aligned} \tag{2}$$

Współczynniki N_1 i N_3 zależą od czasu (tj. od momentów obserwacji) oraz – tak się szczęśliwie składa – dość słabo od nie znanych jeszcze odległości komety od Słońca r_1, r_2, r_3.

Podstawiwszy równania (2) do (1), zapisanych dla chwili drugiej, można z dwóch ostatnich (bo najłatwiej) tak utworzonych równań wyeliminować ϱ_2 otrzymując związek w rodzaju

$$\varrho_3 = M\varrho_1 + m, \tag{3}$$

gdzie współczynniki M i m zależą od czasu poprzez N_1 i N_3 oraz od współrzędnych położenia komety i Słońca na niebie. Związek ten jest znany jako równanie Olbersa.

Wreszcie metoda Olbersa korzysta z jeszcze jednego algebraicznego związku, tzw. równania Eulera dla paraboli (tu właśnie z góry narzucone jest, że mimośród orbity jest równy 1!):

$$6\sqrt{GM_\odot}(t_3 - t_1) = (r_1 + r_3 + s)^{3/2} - (r_1 + r_3 - s)^{3/2}, \tag{4}$$

gdzie G jest stałą grawitacji, $M_\odot$ masą Słońca, a s cięciwą paraboli między położeniami pierwszym i trzecim.

Proces obliczeń przebiega następująco. „Z sufitu” przyjmuje się r_1 i r_3 i oblicza się z równania Eulera cięciwę s oraz przybliżone wartości N_1 i N_3. Mamy teraz układ równań liniowych z niewiadomymi ϱ_1 i ϱ_3:

$$\begin{cases} (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2 = s^2 \\ \varrho_3 = M\varrho_1 + m \end{cases} \tag{5}$$

bowiem każdy chyba widzi, że jeżeli do pierwszego z tych równań podstawić (1), to pojawią się tam tylko nie znane ϱ_1 i ϱ_3.

Rozwiązanie zadania M 586. Mamy

$$\left(\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}\right)^2 = \frac{x^2y^2}{z^2} + \frac{y^2z^2}{x^2} + \frac{z^2x^2}{y^2} + 2(x^2 + y^2 + z^2) =$$
$$= \tfrac{1}{2}x^2\left(\frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{y^2}\right) + \tfrac{1}{2}y^2\left(\frac{z^2}{x^2} + \frac{x^2}{z^2}\right) + \tfrac{1}{2}z^2\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) + 2 \geq$$
$$\geq x^2 + y^2 + z^2 + 2 = 3$$

(skorzystaliśmy tutaj z oczywistej nierówności $\frac{p}{q} + \frac{q}{p} \geq 2$). Stąd kres dolny rozpatrywanego wyrażenia jest co najmniej $\sqrt{3}$.

Z drugiej strony dla $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$ wyrażenie przyjmuje wartość $\sqrt{3}$; taki jest więc kres dolny jego wartości.

Tak więc po rozwiązaniu układu (5) obliczamy z (1) nie znane x_1, y_1, z_1, x_3, y_3, z_3 i tak dostajemy lepsze r_1 i r_3. Z ich użyciem obliczamy lepsze N_1 i N_3 oraz lepsze s z równania Eulera itd. aż do ustalenia się wszystkich wielkości. Na końcu jednorazowo obliczamy x_2, y_2, z_2 i w ten sposób dostajemy trzy punkty paraboli w przestrzeni. Obliczenie stąd elementów tej paraboli jest już mechaniczne. Tę metodę Olbersa (1797) udoskonalił później Gauss tworząc algorytm obliczania wszystkich sześciu elementów orbity bez żadnych wstępnych założeń.

Nazwisko Olbersa wiąże się z jeszcze jednym zagadnieniem, znacznie poważniejszym, jeżeli wagę problemu mierzyć w kilometrach, bowiem dotyczącym całego Wszechświata. Otóż Olbers doszedł do wniosku (ale było to już w 1826 r.), że jeżeli Wszechświat jest stacjonarny, wszędzie średnio jednakowy i nieskończony, to patrząc w dowolnym kierunku powinno się zobaczyć jakąś gwiazdę, a więc niebo powinno mieć jasność powierzchniową jak gwiazda. Prymitywne stwierdzenie, że niebo w nocy jest czarne, dowodzi, że któreś z tych założeń (może wszystkie) jest niedobre. Fakt ten znany jest jako fotometryczny paradoks Olbersa. W ten sposób niemiecki lekarz, żyjący około 200 lat temu, dołożył swoją cegiełkę również do kosmologii.

Tomasz KWAST

200 lat od obalenia teorii flogistonowej

Pod koniec wieku XVIII ostatecznie rozprawiono się z teorią flogistonową.

Nazwę *flogiston* (od greckiego słowa *phlogistos* znaczy *palny*) wprowadził Georg Ernst Stahl około roku 1697. Zasada była prosta: kiedy ciało się spalało – traciło flogiston. Ludzie od dawna uważali, że w czasie spalania coś ubywało, zwykle pozostałość po spaleniu jest dużo mniejsza niż materiał wyjściowy. Stahl uważał, że utlenianie się metali to też tracenie flogistonu. Stąd więc tlenki uważano za substancje proste, a metale za złożone, składające się z tlenku i flogistonu. Powietrze spełniało jedynie funkcję unoszenia flogistonu w czasie jego uwalniania.

Główny zarzut, że tlenek jest cięższy niż metal, z którego powstał, nie miał znaczenia dla Stahla, który w zasadzie nie przypisywał flogistonowi własności materialnych. Późniejsi flogistoniści musieli okazać się bardzo pomysłowi, aby wytłumaczyć ubytki lub przyrosty flogistonu w różnych reakcjach. Czasem uważano nawet, że flogiston ma ujemną masę. Kiedy odkryto wodór – niektórzy chemicy uważali, że jest to właśnie czysty flogiston.

Powietrze uważano za nieaktywne, ale Stephen Hales (angielski botanik) i Hermann Boerhaave (duński chemik) zaczęli podejrzewać, że powietrze może brać udział w reakcjach chemicznych. Zostało to wykazane przez Josepha Blacka w 1756 r. w Edynburgu, kiedy zademonstrował pobieranie dwutlenku węgla przez tlenek wapnia w procesie powstawania węglanu wapnia, czyli kredy i odwrotnie – proces rozkładu w czasie podgrzewania. Następnie odkryty został tlen prawie jednocześnie przez K. W. Scheelego (1772) i Josepha Priestleya (1774).

Na podstawie tych odkryć Lavoisier obalił w latach 1770 – 1790 teorię flogistonową.

Lidia GOETTIG

Śladami Fermata

Od połowy XVII wieku wielu matematyków starało się udowodnić (oczywiście bezskutecznie) hipotezę zwaną Wielkim Twierdzeniem Fermata, czyli wykazać, że

żadne liczby naturalne x, y, z nie spełniają równości

$$x^n + y^n = z^n ,$$

o ile tylko n jest większe od 2.

Ale byli też i tacy, którzy proponowali różne konkurencyjne, ale za to pozytywne hipotezy. Np. można by powiększyć liczbę dodawanych n-tych potęg i zażądać, by po prawej stronie można było postawić dowolnie obraną liczbę naturalną. Hipotezę taką postawił w 1782 roku Edward Waring (1734 – 1798). Sformułujmy ją dokładnie:

dla dowolnego wykładnika naturalnego n istnieje taka najmniejsza liczba naturalna $g(n)$, że dowolną liczbę naturalną l można przedstawić jako sumę $g(n)$ liczb naturalnych (lub zer) podniesionych do n-tej potęgi, czyli

$$l = k_1^n + k_2^n + \ldots + k_{g(n)}^n .$$

Rzeczywiście, można było tak mniemać przez ekstrapolację, bo właśnie Lagrange udowodnił, że

każda liczba naturalna jest sumą czterech kwadratów liczb naturalnych (lub zer).

Hipoteza Waringa nie zyskała sobie nigdy sławy równej Wielkiemu Twierdzeniu Fermata, ale była przez wielu badana i w końcu została udowodniona w 1909 roku przez Davida Hilberta.

Pozostał jednak do dziś otwarty problem, jakie są wartości $g(n)$. Wiemy, że $g(2) = 4$. Wieferich w 1909 wykazał, że $g(3) = 9$, dziś wiemy też, że $g(4) = 19$. A dalej?

Jest dość proste oszacowanie

$$g(n) \geq 2^n + \left[\left(\frac{3}{2}\right)^n\right] - 2 ,$$

które można uzyskać rozkładając $2^n\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n\right] - 1$ na sumę n-tych potęg (spróbuj, Czytelniku). Do tej pory sprawdzono, że w powyższym wzorze równość ma miejsce dla n zawartego między 2 i 471 600 000 (J. M. Kubina, M. C. Wunderlich, 1989) oraz dla n dostatecznie dużych, choć nie wiadomo jak dużych (K. Mahler, 1957).

Marek KORDOS