Twierdzenie Fermata o rozkładzie liczby pierwszej na sumę kwadratów

Klasyczne już dziś twierdzenie Fermata mówi, że każda liczba pierwsza p postaci $4n+1$ jest sumą dwóch kwadratów: $p = a^2 + b^2$. Znamy wiele dowodów tego twierdzenia. Chyba najkrótszy został niedawno opublikowany przez D. Zagiera w *American Mathematical Monthly*. Zapoznajmy się z tym dowodem.

Rozważmy skończony zbiór S zdefiniowany następująco:

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{N}^3 : x^2 + 4yz = p\right\}$$

oraz funkcję $f : S \to S$ określoną wzorem:

$$f(x,y,z) = \begin{cases} (x+2z, z, y-x-z), & \text{jeśli } x < y - z, \\ (2y-x, y, x-y+z), & \text{jeśli } y - z < x < 2y, \\ (x-2y, x-y+z, y), & \text{jeśli } x > 2y. \end{cases}$$

Funkcja f jest inwolucją, tzn. dla dowolnej trójki liczb $(x,y,z) \in S$ zachodzi równość $f(f(x,y,z)) = (x,y,z)$.

Zauważamy następnie, że trójka $(1,1,n)$ jest punktem stałym funkcji $f : f(1,1,n) = (1,1,n)$. Jest to przy tym jedyny punkt stały tej funkcji. Inny punkt stały dawałby bowiem rozkład liczby p na iloczyn dwóch liczb całkowitych. Wynika stąd, że zbiór S ma nieparzystą liczbę elementów.

Weźmy teraz nową funkcję $g : S \to S$ daną wzorem

$$g(x,y,z) = (x,z,y).$$

Ta funkcja jest również inwolucją: $g(g(x,y,z)) = (x,y,z)$. Zbiór S ma nieparzystą liczbę elementów, a więc funkcja g musi mieć co najmniej jeden punkt stały: $g(x,y,z) = (x,y,z)$. Ale wtedy $y = z$, czyli $p = x^2 + 4yz = x^2 + 4y^2 = x^2 + (2y)^2$, co kończy dowód twierdzenia. Pominięte szczegóły dowodu pozostawię Czytelnikowi jako bardzo łatwe ćwiczenie.

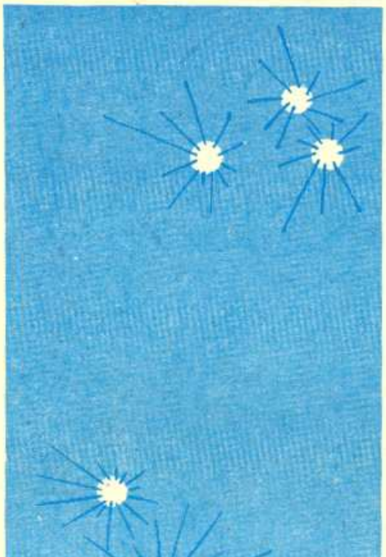
Przeprowadzony wyżej dowód twierdzenia Fermata jest bardzo prosty, ale ma jedną zasadniczą wadę. Nie pokazuje on, w jaki sposób można znaleźć takie liczby a i b, że $p = a^2 + b^2$. Jest on całkowicie niekonstruktywny. Znamy wiele dowodów tego twierdzenia dających różne metody otrzymywania liczb a i b. Uzyskiwane w ten sposób algorytmy mają różne własności, jedne działają szybciej, inne wolniej.

Bardzo ładne wzory podał Gauss. Jeśli $p = 4n+1$ oraz przez $\langle x \rangle$ oznaczymy taką „resztę" z dzielenia x przez p, że $|\langle x \rangle| < \frac{p}{2}$, (tzn. $x = q \cdot p + \langle x \rangle$ oraz $|\langle x \rangle| < \frac{p}{2}$), to:

$$a = \left\langle \frac{1}{2} \cdot \binom{2n}{n} \right\rangle, \qquad b = \langle (2n)! \cdot a \rangle.$$

Te wzory, niestety, też są zupełnie nieprzydatne w praktyce. Do obliczenia liczby $(2n)!$ trzeba wykonać $2n$ mnożeń. Jeśli liczba n ma kilkadziesiąt cyfr, to takie obliczenia trwałyby co najmniej miliardy lat. Przy wyznaczaniu liczb a i b, zgodnie z algorytmem danym przez wzory Gaussa, musimy wykonać liczbę działań proporcjonalną do liczby p. Dla dużych liczb p jest to niewykonalne. Jesteśmy więc zainteresowani znalezieniem algorytmu szybkiego i prostego. Są takie algorytmy. Jeden z nich przedstawiamy w tym numerze *Delty* (str. 10).

doc. dr Wojciech GUZICKI



Zadania

Redaguje mgr Michał WOJCIECHOWSKI

M 583. Czy szachownicę o wymiarach $4 \times n$ można obejść ruchem konika szachowego tak, by na każdym polu stać dokładnie raz i w ostatnim posunięciu wrócić na pole startu?
Rozwiązanie na str. 1.

M 584. Czy w prostokąt o stosunku długości boków $9 : 16$ można wpisać prostokąt o stosunku długości boków $4 : 7$, tak by na każdym boku pierwszego prostokąta leżał wierzchołek drugiego?
Rozwiązanie na str. 1.

M 585. Udowodnić, że nie istnieje wielomian dodatniego stopnia o współczynnikach całkowitych, którego wartości we wszystkich punktach całkowitych są liczbami pierwszymi.
Rozwiązanie na str. 1.

Redaguje dr Krzysztof CHARCHUŁA

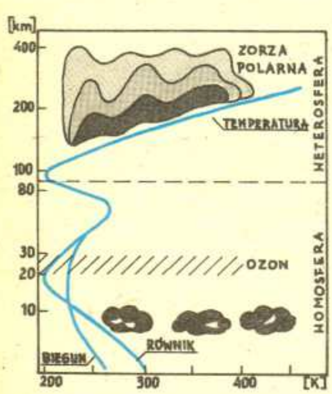
F 296. Rakieta wyposażona w impulsowy silnik odrzutowy, pozwalający zmieniać prędkość w ciągu bardzo krótkiego czasu, krąży wokół Ziemi po orbicie kołowej. Jak użyć tego silnika, aby przemieścić rakietę na orbitę również kołową, ale o nieco większym promieniu?
Rozwiązanie na str. 16.

F 297. Do szklanki o średnicy d i wysokości h nalano wody. Przy jakim poziomie wody środek masy układu: szklanka + woda przyjmie najniższe położenie? Przyjąć, że ścianki i dno szklanki są jednorodne i mają gęstość powierzchniową μ, woda zaś gęstość objętościową ρ.
Rozwiązanie na str. 3.

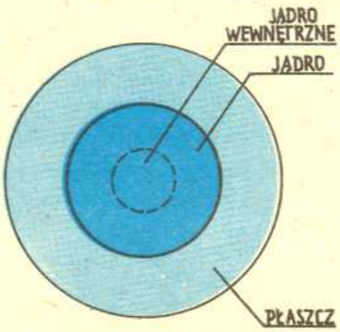
ZIEMIA

Planeta uznawana do 1543 r. za centrum Wszechświata. Kres temu poglądowi przyniosła hipoteza Kopernika opublikowana w tym właśnie roku. Nasze informacje o Ziemi pochodzą, siłą rzeczy, głównie z nauk nie mających nic wspólnego z astronomią. Ale od 1957 r. zaczęto Ziemię i jej otoczenie badać metodami „kosmicznymi", tzn. za pośrednictwem sztucznych satelitów i sond kosmicznych. W tym właśnie roku został wystrzelony pierwszy sztuczny satelita Sputnik 1. Metodami satelitarnymi przebadano ziemską atmosferę, odkryto pasy radiacyjne, przesondowano magnetosferę.

Według obecnej wiedzy Ziemia jest jedyną (przynajmniej w Układzie Słonecznym) planetą, na której rozwinęło się życie. Życie to, zanim stworzyło cywilizację i wyszło w kosmos (J. Gagarin, 1961), przejawiło swoje istnienie w skali kosmicznej już dawno – mianowicie wczesne organizmy wytworzyły atmosferyczny tlen (około 1/5 masy atmosfery), z którego teraz inni, być może zbyt rozrzutnie, korzystają.



Atmosfera Ziemi



wielka półoś orbity	150 mln km
mimośród	0,0167
nachylenie	0
promień równikowy	6 378 km
masa	$5{,}974\times10^{24}$ kg
okres obrotu	$0{,}^{d}997$
okres obiegu	$365{,}^{d}25$

KSIĘŻYC

promień orbity	384 400 km
okres obiegu	$27{,}^{d}3217$
promień	1 738 km
masa	$7{,}348\times10^{22}$ kg

Księżyc jest w stosunku do swojej macierzystej planety najmasywniejszym satelitą w Układzie Słonecznym (być może, z wyjątkiem układu Pluton – Charon). Nic więc dziwnego, że właśnie on warunkuje szereg zjawisk zachodzących na Ziemi, np. precesja osi ziemskiej, pływy i wynikające z tego spowalnianie ruchu obrotowego Ziemi (w tempie 0,002 s/stulecie) i in. Również Ziemia wywarła swój wpływ na Księżyc, np. wyhamowując jego obrót tak, że obecnie jego okres obrotu równy jest okresowi obiegu. Dlatego Księżyc widzimy stale z jednej tylko strony – pierwsze obrazy odwrotnej strony Księżyca przesłała Łuna 3 w 1959 r. Z kolei spowalnianie obrotu Ziemi, czyli ubytek jej momentu pędu, musi być skompensowany wzrostem momentu pędu Księżyca – dlatego obecnie Księżyc oddala się od Ziemi, co jest bezpośrednio mierzalne metodami laserowymi. Wreszcie naturalną rzeczą jest, że Księżyc został pierwszym celem kosmicznej wyprawy człowieka (N. Armstrong, 1969).

LM nad Księżycem