Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Szczegółowy regulamin **Klubu 44** zamieściliśmy w *Delcie* 7/1990, a jego skrót – we wszystkich numerach, w których są zadania ligowe (tj. w tym roku z wyjątkiem numerów 11 i 12).

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 8/1990

Przypominamy treść zadań:

207. Liczby rzeczywiste x, y, z spełniają równość

$$\frac{x^2+y^2-z^2}{2xy}+\frac{y^2+z^2-x^2}{2yz}+\frac{z^2+x^2-y^2}{2zx}=1.$$

Dowieść, że dwa spośród ułamków będących składnikami lewej strony są równe 1 (a pozostały -1).

208. Rozważamy ciąg funkcji (f_n) określonych na przedziale $(0;\pi)$ wzorem: $f_1(x)=\sin x$, $f_{n+1}(x)=(\sin x)^{f_n(x)}$. Dla każdego n naturalnego wyznaczyć $\lim\limits_{x\to 0+} f_n(x)$.

207. Zachodzi łatwa do sprawdzenia tożsamość

$$\frac{x^2+y^2-z^2}{2xy}+\frac{y^2+z^2-x^2}{2yz}+\frac{z^2+x^2-y^2}{2zx}-1=\frac{(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)}{2xyz}.$$

Skoro lewa strona ma być równa zeru, jeden z czynników prawej strony musi być zerem. Jeśli na przykład $x+y-z=0$, to

$$\frac{y^2+z^2-x^2}{2yz}=\frac{(y-z)^2-x^2+2y^2}{2yz}=1$$

i podobnie

$$\frac{z^2+x^2-y^2}{2zx}=1.$$

Stąd teza.

208. Zamiast ciągu (f_n) rozważmy ciąg funkcji (g_n) określony wzorem rekurencyjnym

$$g_1(x)=x,\quad g_{n+1}(x)=x^{g_n(x)}\quad \text{dla } x>0,\quad n=1,2,3,\ldots \tag{1}$$

Ciągi (f_n) i (g_n) są związane zależnością

$$f_n(x)=g_n(\sin x)\quad \text{dla } x\in(0;\pi),\quad n=1,2,3,\ldots, \tag{2}$$

wynikającą przez natychmiastową indukcję wprost z definicji tych ciągów.

Przyjmijmy dodatkowo: $g_0(x)=1$; oczywiście, wzór (1) jest wówczas słuszny i dla $n=0$. Wykażemy przez indukcję, że

$$\lim_{x\to 0+} g_{2k}(x)=1\quad \text{dla } k=0,1,2,\ldots \tag{3}$$

Dla $k=0$ nie ma czego dowodzić. Przyjmijmy, że relacja (3) zachodzi dla pewnego k; mamy wykazać jej słuszność z k zwiększonym o 1. Z założenia indukcyjnego $g_{2k}(x)$ dąży do 1 przy x dążącym z prawej strony do zera, a wobec tego $1/2<g_{2k}(x)<2$ dla x dostatecznie bliskich 0. Stąd, przez dwukrotne zastosowanie wzoru (1),

$$x^{x^{1/2}}<g_{2k+2}(x)<x^{x^2}\quad \text{dla } x \text{ bliskich } 0. \tag{4}$$

Dla każdego wykładnika $p>0$ mamy, zgodnie z regułą de l'Hospitala,

$$\lim_{x\to 0+} x^p\ln x=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{x^{-p}}=\lim_{x\to 0+}\frac{x^{-1}}{-px^{-p-1}}=-\frac{1}{p}\lim_{x\to 0+}x^p=0,$$

a stąd

$$\lim_{x\to 0+} x^{x^p}=\lim_{x\to 0+}\exp(x^p\ln x)=1.$$

Zatem oba skrajne człony nierówności podwójnej (4) dążą do 1 (przy $x\to 0^+$), więc i środkowy musi dążyć do 1. To kończy indukcyjny dowód relacji (3).

Z (3) wynika natychmiast:

$$\lim_{x\to 0+} g_{2k+1}(x)=\lim_{x\to 0+} x^{g_{2k}(x)}=0\quad \text{dla } k=0,1,2,\ldots \tag{5}$$

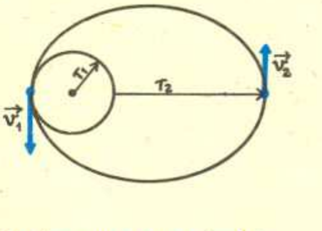
Wobec zależności (2) takie same są też wartości granic prawostronnych w zerze funkcji f_n:

$$\lim_{x\to 0+} f_n(x)=\begin{cases}1 & \text{dla } n \text{ parzystych},\\ 0 & \text{dla } n \text{ nieparzystych.}\end{cases}$$

Rozwiązanie zadania F 296.
Załóżmy, że promień pierwszej orbity wynosi r_1. Wówczas prędkość rakiety dana jest wzorem

$$v=\sqrt{\frac{GM}{r_1}},$$

gdzie M jest masą Ziemi. W pewnym momencie ustawiamy rakietę równolegle do kierunku jej prędkości i uruchamiamy silnik. W rezultacie jego działania prędkość rakiety osiągnie wartość $v_1=v+\Delta v_1$, natomiast odległość od Ziemi nie ulegnie zmianie. Orbita stanie się teraz elipsą o ognisku w środku Ziemi, przy czym (jak wynika z zasady zachowania energii) punkt, w którym znajduje się rakieta po ustaniu działania silników, będzie perigeum nowej orbity. Po upływie pewnego czasu rakieta przemieści się do apogeum odległego od środka Ziemi o r_2.



Prędkość w apogeum v_2 będzie, oczywiście, mniejsza niż w perigeum. Wystarczy teraz ponownie uruchomić silnik i przyspieszyć rakietę do prędkości odpowiadającej ruchowi po orbicie kołowej o promieniu r_2: $v'=\sqrt{\frac{GM}{r_2}}$. Obliczymy teraz zarówno r_2, jak i v_2. Z zasad zachowania energii i momentu pędu (obowiązujących, gdy nie działają silniki) dostaniemy następujące równości:

$$-\frac{GM}{r_1}+\frac{v_1^2}{2}=-\frac{GM}{r_2}+\frac{v_2^2}{2},$$

$$r_1v_1=r_2v_2.$$

Znajdujemy stąd

$$r_2=\frac{r_1^2v_1^2}{2GM-r_1v_1^2},$$

$$v_2=\frac{2GM-r_1v_1^2}{r_1v_1}=$$

$$=\frac{\sqrt{GM(2GM-r_1v_1^2)}}{r_1v_1}-\Delta v_2,$$

gdzie przez $\Delta v_2=v'-v_2$ oznaczyliśmy przyrost prędkości konieczny do osiągnięcia orbity kołowej w apogeum.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 8/1990

Redaguje dr Andrzej NADOLNY

Przypominamy treść zadań:

105. Statek o okresie własnym kołysania poprzecznego równym τ płynie z prędkością $\vec{v}$ przez fale oceaniczne o długości d, poruszające się z prędkością $\vec{u}$. Przy spełnieniu jakich warunków wystąpią cztery różne „wrażliwe kursy" statku, dla których działanie fal na statek będzie wzbudzało jego drgania własne? Kurs statku określony jest przez wektor $\vec{v}$.

106. Jednorodny, wiotki, cienki, obdarzony masą sznurek (lub łańcuszek) o długości l, zawieszony na jednym końcu, może wykonywać drgania poprzeczne o różnych częstotliwościach, którym odpowiada różna liczba węzłów (jeden z nich występuje zawsze w punkcie zawieszenia). Częstotliwości takich małych drgań są proporcjonalne do $\sqrt{g/l}$ (g – przyspieszenie ziemskie). Obliczyć – w sposób numeryczny – pierwsze cztery częstotliwości małych drgań tego sznurka, przyjmując, że poszczególne elementy sznurka drgają harmonicznie z tą samą częstotliwością, lecz z różnymi amplitudami.

105. Prędkość statku względem fal jest równa $\vec{v} - \vec{u}$. Prostopadła do fal składowa tej prędkości wynosi

$$v\cos\alpha - u,$$

gdzie α jest kątem między wektorami $\vec{u}$ i $\vec{v}$. Spotkania statku z kolejnymi grzbietami fal będą następowały w odstępach czasu

$$t = \frac{d}{v\cos\alpha - u}.$$

Aby mogło przy tym następować wzbudzanie własnych drgań statku o okresie T, powinien zachodzić warunek $t = \pm T$, który – po wprowadzeniu oznaczenia na okres fal $\tau = \frac{d}{u}$ – przyjmuje postać

$$(\star)\qquad \cos\alpha = \frac{u}{v}\left(1 \pm \frac{\tau}{T}\right).$$

„Wrażliwe kursy" odpowiadają kątom α spełniającym równanie $(\star)$. Aby mogło mieć ono cztery pierwiastki α, musi zachodzić

$$\left|\frac{u}{v}\left(1 \pm \frac{\tau}{T}\right)\right| < 1.$$

Wobec $\tau > 0$, $T > 0$ oznacza to

$$1 + \frac{\tau}{T} < \frac{v}{u},$$

z czego wynika

$$v > u + \frac{d}{T}.$$

Jeżeli mają być wzbudzane drgania poprzeczne, obliczone z równania $(\star)$ kąty nie powinny mieć wartości zbyt bliskich 0° oraz 180°. Ponadto długość fal d nie powinna być większa od rozmiarów statku.

I drganie	$n = 20$	$A = 1,411$
	$n = 50$	$A = 1,432$
	$n = 100$	$A = 1,439$
	$n = 200$	$A = 1,442$
II drganie	$n = 50$	$A = 7,54$
	$n = 100$	$A = 7,58$
	$n = 200$	$A = 7,60$
III drganie	$n = 50$	$A = 18,50$
	$n = 100$	$A = 18,63$
	$n = 200$	$A = 18,68$
IV drganie	$n = 100$	$A = 34,60$
	$n = 200$	$A = 34,68$
	$n = 500$	$A = 34,73$

106. Dla uproszczenia przyjmujemy, że sznurek składa się z n punktów materialnych o masie $\frac{m}{n}$ odległych od siebie o $\frac{l}{n}$. Oznaczmy wychylenia kolejnych mas jako $x_1 \dots x_n$, poczynając od dolnego końca. Siła napięcia sznurka pomiędzy i-tym a $(i+1)$-szym punktem materialnym ma (w przybliżeniu małego odchylenia od pionu) wartość $\frac{mgi}{n}$, zaś jej pozioma składowa wynosi

$$(1)\qquad \frac{mgi}{n}\,\frac{x_{i+1} - x_i}{l/n} = \frac{mgi}{l}(x_{i+1} - x_i).$$

Podstawiając $i = 1$ możemy przyrównać to wyrażenie do iloczynu masy $\frac{m}{n}$ i przyspieszenia dolnego punktu $a_1 = -\omega^2 x_1$. Po przekształceniach otrzymujemy

$$(2)\qquad x_2 = \left(1 - \frac{A}{n}\right)x_1, \quad \text{gdzie } A = \frac{\omega^2 l}{g}.$$

Na każdy z następnych punktów materialnych działają dwie siły określone równaniem (1) – górna i dolna. Odejmujemy je

$$\frac{mgi(x_{i+1} - x_i)}{l} - \frac{mg(i-1)(x_i - x_{i-1})}{l}$$

i przyrównując do $\frac{m}{n}(-\omega^2 x_i)$ otrzymujemy jak poprzednio

$$(3)\qquad x_{i+1} = \frac{1}{i}\left(x_i\left(2i - 1 - \frac{A}{n}\right) - x_{i-1}(i-1)\right).$$

W równaniach (2) i (3) możemy (skracając po obu stronach zależność od czasu daną czynnikiem $\cos\omega t$) uważać, że x_i są amplitudami drgań (z dopuszczeniem znaku minus, jeśli faza jest przeciwna). Schemat obliczeń jest następujący: wybrawszy na chybił trafił A podstawiamy za amplitudę dolnego końca $x_1 = 1$, obliczamy x_2 z równania (2), a następnie kolejno $x_3 \dots x_{n+1}$ z równania (3). Prawidłowej wartości A odpowiada $x_{n+1} = 0$, tzn. nieruchomy górny koniec. W razie otrzymania $x_{n+1} \neq 0$ należy skorygować A i powtórzyć rachunek od początku. Aby zorientować się z grubsza w wielkości i znaku niezbędnej poprawki, a także aby stwierdzić, ile węzłów występuje w rozpatrywanym drganiu, dobrze jest przedstawić x_i graficznie. Obliczenia mogą być wykonane za pomocą komputera lub kalkulatora. Wyniki na marginesie.

Ponieważ $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\sqrt{A}}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$, więc żądany w treści zadania bezwymiarowy współczynnik jest równy $\frac{\sqrt{A}}{2\pi}$.

Wykonując pomiary częstotliwości pierwszych dwóch wahań łańcuszka metalowego o długości około 30 cm, otrzymaliśmy wyniki zgodne z obliczonymi wartościami A, z błędem nie przekraczającym 5%.