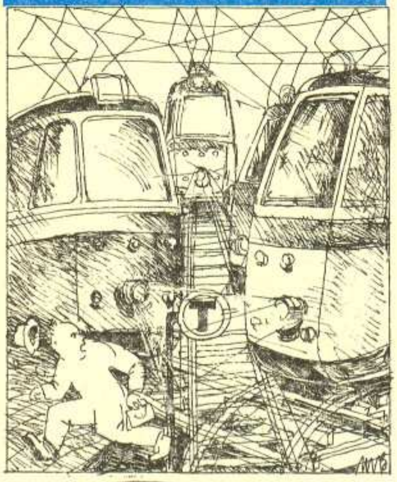


Od twierdzenia o antypodach do twierdzenia Brouwera

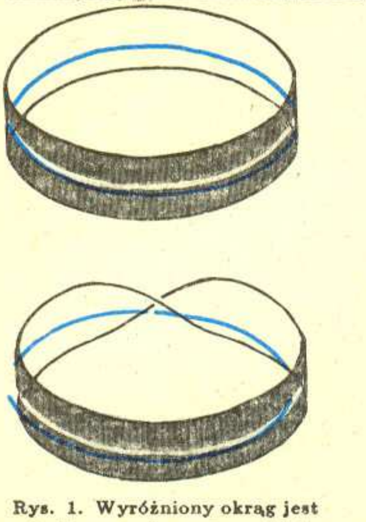
dr Krzysztof CIESIELSKI, dr Zdzisław POGODA

Nie raz i nie dwa denerwujemy się czekając na przystanku tramwajowym; zwłaszcza gdy czekamy długo, a w odpowiednim kierunku kursują dwie lub trzy linie. A gdy w końcu tramwaj przyjedzie, to zaraz za nim pojawi się ten drugi, a może i trzeci.

W matematyce można zaobserwować podobne zjawisko. Niekiedy mija wiele czasu, zanim uczeni uporają się z jakimś problemem, ale za to dzięki uzyskanemu wynikowi można bardzo łatwo otrzymać wiele innych konsekwencji. Zdarza się także, że pewne zasadnicze twierdzenia w prosty sposób wynikają z siebie nawzajem. W efekcie w podręcznikach występują one prawie zawsze obok siebie.

Jednym z najsłynniejszych przykładów dotyczących opisanego zjawiska jest niezwykle ważne twierdzenie o punkcie stałym, udowodnione w 1910 roku przez Holendra Luitzena Brouwera, łączone z reguły z twierdzeniem o retrakcie. Przed sformułowaniem tych twierdzeń należy jednak podać kilka definicji.

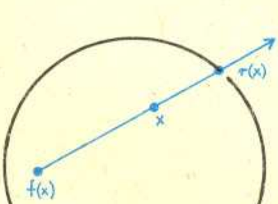
Rozważać będziemy przestrzeń $\mathbb{R}^n$, czyli zbiór $\{(x_1, \ldots, x_n) \,:\, x_i \in \mathbb{R}\}$. Przez $\|x\|$ oznaczamy normę punktu $x \in \mathbb{R}^n$ (czyli odległość punktu od zera). Kulą jednostkową (n-wymiarową) w tej przestrzeni nazywamy zbiór $K^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,:\, x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leq 1\}$, sferą n-wymiarową zaś zbiór $S^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \,:\, x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1\}$. Zarówno kula, jak i sfera, mają środek w początku układu, w punkcie 0 $(= (0, \ldots, 0))$. Oczywiście, brzegiem kuli n-wymiarowej jest sfera $(n-1)$-wymiarowa. Czytelnik, który czuje niechęć do przestrzeni o wyższych wymiarach, może skupić swoją uwagę na wymiarach 2 i 3. Tu kula trójwymiarowa to zwykła kula, jej brzeg to sfera dwuwymiarowa, czyli zwyczajna sfera. Kula dwuwymiarowa to koło, jej brzeg to sfera jednowymiarowa, czyli okrąg.



Rys. 1. Wyróżniony okrąg jest retraktem paska papieru sklejonego zarówno „normalnie" (walca bez podstaw), jak i sklejonego po przekręceniu jednego końca o 180° (wstęgi Möbiusa).

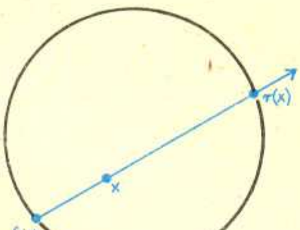
Potrzebne nam jeszcze będzie pojęcie retraktu (od łacińskiego słowa „retraho" – odciągać, zaciągać, wlec). *Zbiór A nazywamy retraktem zbioru B (zawierającego A), jeśli istnieje funkcja ciągła $f : B \to A$, na zbiorze A identycznościowa* (zaznaczmy, że ciągłość polega, intuicyjnie, na przyporządkowaniu bliskim argumentom bliskich wartości). Funkcję taką nazywamy retrakcją. Na przykład, zbiór $[0, \infty)$ jest retraktem $\mathbb{R}$ (odpowiednią retrakcją jest funkcja: wartość bezwzględna), a zbiór $\{0, 1\}$ nie jest retraktem odcinka $[0, 1]$ (chcąc stworzyć retrakcję musielibyśmy rozerwać wykres, a więc funkcja nie byłaby ciągła – formalny dowód wymaga wykorzystania twierdzenia o przyjmowaniu wartości pośrednich). Kolejny przykład można obejrzeć na rysunku 1.

Możemy przejść teraz do obiecanych rezultatów. Twierdzenie Brouwera mówi, że *dowolna funkcja ciągła $f : K^n \to K^n$ ma punkt stały, tzn. taki punkt x, że $f(x) = x$.* Innymi słowy, jeśli będziemy kulę wyginać, ściskać, ciągnąć (nie rozrywając jej), byleby nie wyjść poza nią, zawsze przynajmniej jeden punkt pozostanie tam, gdzie był. Twierdzenie o retrakcie stwierdza natomiast, że *sfera $(n-1)$-wymiarowa nie jest retraktem kuli n-wymiarowej*, czyli że kuli nie da się w sposób ciągły przekształcić na jej brzeg, zostawiając wszystkie punkty brzegu na swoim miejscu. Dowody tych faktów nie są łatwe, przeprowadzenie ich wymaga użycia pokaźnego aparatu matematycznego. Gdy jednak ma się jedno z tych twierdzeń, błyskawicznie można otrzymać i drugie. Wykażemy to.



Przypuśćmy, że istnieje retrakcja $r : K^n \to S^{n-1}$. Zdefiniujmy $f : K^n \to S^{n-1} \subset K^n$ wzorem: $f(x) = -r(x)$. Funkcja ta jest ciągła i nie ma punktu stałego; istotnie, punkt stały odwzorowania f musiałby należeć do S^{n-1}, a tu $f(x) = -x$, bo r jest na S^{n-1} równa identyczności. Jedynym punktem, dla którego $x = -x$, jest 0, które do sfery nie należy. Wykazaliśmy, że z twierdzenia Brouwera wynika twierdzenie o retrakcie.

Na odwrót: przypuśćmy, że istnieje funkcja ciągła $f : K^n \to K^n$, taka że $f(x) \neq x$ dla dowolnego x. Utwórzmy półprostą, rozpoczynającą się w punkcie $f(x)$ i przechodzącą przez x; punkty te są różne, więc półprosta jest wyznaczona jednoznacznie. Ponieważ $f(x)$ należy do K^n, półprosta ma punkt wspólny ze sferą (rys. 2); ten punkt oznaczamy przez $r(x)$. Może się zdarzyć, że półprosta ma ze sferą dwa wspólne punkty; taka sytuacja zaistnieje tylko wtedy, gdy $f(x)$ należy do sfery i wówczas $r(x)$ definiujemy jako ten drugi punkt. Skonstruowaliśmy w ten sposób funkcję $r : K^n \to S^{n-1}$. Opierając się na konstrukcji można łatwo wykazać, że funkcja r jest ciągła i że punktom ze sfery przyporządkowuje je same. Jest więc ona retrakcją kuli na sferę, co jest niemożliwe.



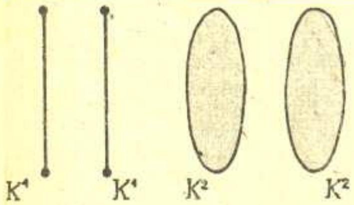
Rys. 2

Kolejnym twierdzeniem, które „chodzi w parze" z innym, jest twierdzenie Borsuka–Ulama o antypodach, wykazane przez Karola Borsuka i Stanisława Ulama w 1933 roku. Oba twierdzenia, tzn. twierdzenie o antypodach i twierdzenie Brouwera, mają dwie ważne cechy najpiękniejszych twierdzeń matematyki: są bardzo proste w sformułowaniu i niebanalne w dowodzie. Nadmieńmy, że o obu tych twierdzeniach w *Delcie* już była mowa; było to jednak bardzo dawno, w czasach, gdy niektórzy z obecnych autorów *Delty* rozpoczynali swoją edukację w szkołach podstawowych.

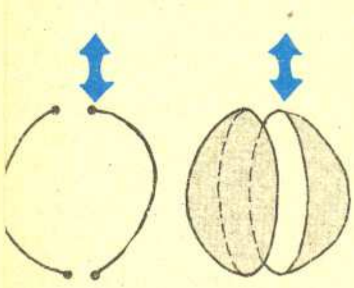
Podajmy więc (przypomnijmy) tak zareklamowane twierdzenie. Mówi ono, że *dla dowolnej funkcji ciągłej $f : S^n \to \mathbf{R}^n$ istnieją dwa punkty antypodyczne (tzn. leżące dokładnie naprzeciwko siebie), w których funkcja przyjmuje te same wartości;* inaczej, *istnieje $x \in S^n$ takie, że $f(-x) = f(x)$*. Można to sobie wyobrazić w ten sposób, że mamy balonik w kształcie kuli, z którego wypuszczamy powietrze i następnie go idealnie spłaszczamy. Zawsze znajdą się wtedy punkty, które uprzednio były na przeciwnych biegunach balonika, a po spłaszczeniu skleją się ze sobą.

Twierdzenie to jest „stowarzyszone" z twierdzeniem o odwzorowaniu antypodalnym. Ono zaś powiada, że *jeśli $m < n$, to nie istnieje funkcja ciągła $f : S^n \to S^m$, antypodalna (tzn. zachowująca własność „leżenia naprzeciwko siebie", czyli taka, że $f(-x) = -f(x)$ dla wszystkich x).* Inaczej, jeśli przekształcamy w sposób ciągły sferę np. dwuwymiarową na okrąg, to zawsze znajdą się dwa punkty, które pierwotnie leżały naprzeciwko siebie, a po przekształceniu tej własności mieć nie będą.

I tu dowód równoważności nie jest zbyt trudny. Przypuśćmy najpierw, że pewna funkcja ciągła $f : S^n \to \mathbf{R}^n$ ma własność $f(x) \neq f(-x)$ dla wszystkich x. Określmy $g(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{\|f(x)-f(-x)\|}$. Mianownik tego wyrażenia jest dla wszystkich $x \in S^n$ liczbą różną od 0, wyrażenie więc ma sens. Wartości g należą do S^{n-1}, bo należą do $\mathbf{R}^n$ i dla wszystkich x mamy $\|g(x)\| = \frac{1}{\|f(x)-f(-x)\|}\|f(x) - f(-x)\| = 1$ (gdyż jedna z podstawowych własności normy mówi, że $\|\lambda y\| = |\lambda|\|y\|$ dla $\lambda \in \mathbf{R}$ i $y \in \mathbf{R}^n$). Ponadto g jest funkcją ciągłą (bo wiadomo, że norma jest funkcją ciągłą) i $g(-x) = -g(x)$ dla wszystkich x, co przeczy twierdzeniu o odwzorowaniu antypodalnym.

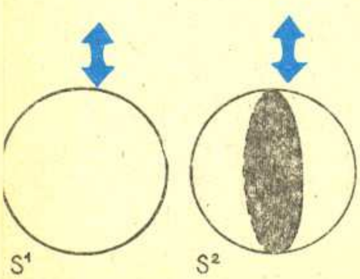

K^1 K^1 K^2 K^2

Na odwrót: przypuśćmy, że istnieje $f : S^n \to S^m$ ciągła, taka, że $f(-x) = -f(x)$ dla wszystkich x. Zbiór S^m jest podzbiorem $\mathbf{R}^{m+1}$, a zatem także podzbiorem $\mathbf{R}^n$ (bo $m + 1 \leq n$, a gdy $m + 1 < n$, możemy na ostatnich współrzędnych dopisać zera – np. okrąg, leżący na płaszczyźnie, możemy traktować jako podzbiór przestrzeni trójwymiarowej). Ale wobec tego $f(x) \neq f(-x)$ dla wszystkich x z dziedziny, bo gdyby dla pewnego x było prawdą, że $f(x) = f(-x)$, to z założenia $f(-x) = -f(x)$, czyli $f(x) = -f(x)$ i $f(x) = 0$, co jest niemożliwe, gdyż $f(x)$ jest elementem S^m, czyli należy do sfery o środku w zerze. A więc i te dwa twierdzenia łatwo wynikają z siebie nawzajem. Trzeba tylko do któregoś z nich dotrzeć...



Informacje o tym, że te dwie pary twierdzeń są równoważne, znajdują się w prawie wszystkich podręcznikach topologii, wspominających o tych faktach. Są tam także i inne, bardzo ciekawe wnioski z podanych wyżej wyników. Naszym głównym celem jest natomiast zapoznanie Czytelników z pewnym zjawiskiem, które w podręcznikach znaleźć jest znacznie trudniej. Okazuje się bowiem, że z twierdzenia Borsuka–Ulama można bardzo szybko otrzymać twierdzenie Brouwera! Co więcej, dowód tego wcale nie jest trudny. W chwili obecnej jesteśmy do niego odpowiednio przygotowani i możemy się tym zająć.

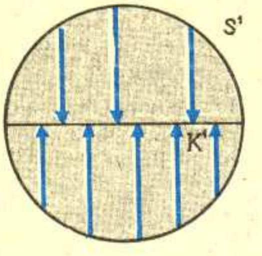
Najpierw udowodnimy lemat.
Lemat. *Jeżeli $f : K^n \to S^{n-1}$ jest funkcją ciągłą, to istnieje takie $x \in S^{n-1}$, że $f(x) = f(-x)$.*
Lemat ten mówi, określając to bardziej poglądowo, że jeśli funkcja ciągła przeprowadza kulę w jej brzeg, to musi ona „skleić" dwa punkty leżące naprzeciwko siebie na sferze. Wykażemy go za pomocą twierdzenia o antypodach.

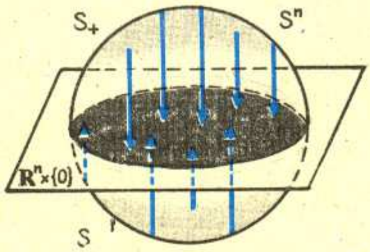

S^1 S^2

Wiemy, że sferę n-wymiarową możemy otrzymać za pomocą sklejenia wzdłuż brzegu dwóch kul n-wymiarowych (po uprzednim ich odpowiednim wygięciu). Okrąg (sferę jednowymiarową) dostaniemy po sklejeniu dwóch wygiętych odcinków (kul jednowymiarowych). Sferę skonstruujemy sklejając dwa koła (rys. 3) – i tak dalej, ale może nie próbujmy sobie tego wyobrazić... Formalnie możemy napisać, że

$$S^n = \left\{ \left(x_1, \ldots, x_n, \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right) \right\} \cup \left\{ \left(x_1, \ldots, x_n, -\sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right) \right\}.$$

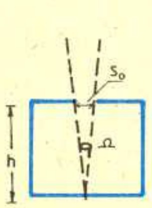
Oznaczmy pierwszy zbiór przez S_+ (górna półsfera), drugi przez S_- (dolna).

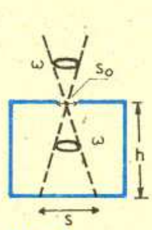




Rys. 4

Rozwiązanie zadania F 295.





Rys. 1 Rys. 2

Przyjęcie założenia o całkowitym zachmurzeniu oznacza, że światło jest zupełnie rozproszone, a zatem strumień światła na jednostkę kąta bryłowego nie zależy od kierunku. Oznaczmy przez σ wartość strumienia światła w jednostkowym kącie bryłowym i padającego na jednostkę powierzchni otworu. W nieobecności soczewki na dno pudła padają promienie świetlne pochodzące z kąta bryłowego o rozwartości $\Omega \simeq S_0/h^2$ (rys. 1), gdzie przez S_0 oznaczyliśmy powierzchnię otworu. Zatem w tym przypadku natężenie oświetlenia dna wynosi

$$E_1 = \sigma\cdot\Omega = \frac{\sigma S_0}{h^2}.$$

Soczewka zbiera w swojej płaszczyźnie ogniskowej (pokrywającej się z dnem pudła) promienie świetlne pochodzące z pewnego kąta bryłowego ω (rys. 2), powierzchnia oświetlonego obszaru wynosi zaś

$$S = h^2\omega.$$

Tym samym strumień światła dany jest przez iloczyn $\Phi = \sigma\cdot S_0\cdot\omega$, a oświetlenie

$$E_2 = \frac{\Phi}{S} = \frac{\sigma S_0}{h^2} = E_1.$$

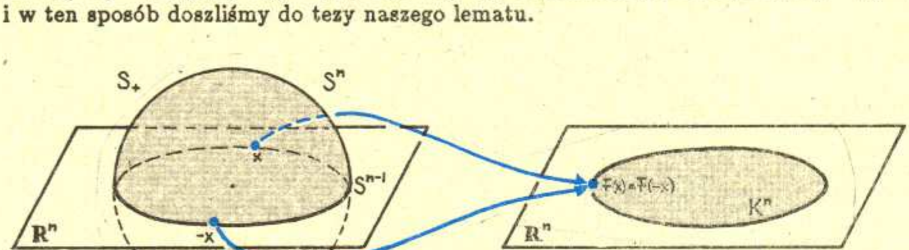
A zatem natężenie oświetlenia dna pudła pod otworem nie ulegnie zmianie.

Rozważmy rzutowania punktów z obu półsfer na przestrzeń o wymiarze o jeden niższym wyznaczoną przez „równik" (czyli na $\mathbf{R}^n\times\{0\}$ – rys. 4). Rzutujemy wzdłuż prostej prostopadłej do $\mathbf{R}^n\times\{0\}$; w przypadku sfery dwuwymiarowej jest to rzut prostopadły na płaszczyznę równika. Pierwsze rzutowanie (o dziedzinie S_+) oznaczmy przez φ_+, drugie (o dziedzinie S_-) przez φ_-. Mamy

$$\varphi_+\left(\left(x_1,\ldots,x_n,\sqrt{1-\sum_{i=1}^n x_i^2}\right)\right) = (x_1,\ldots,x_n),$$

$$\varphi_-\left(\left(x_1,\ldots,x_n,-\sqrt{1-\sum_{i=1}^n x_i^2}\right)\right) = (x_1,\ldots,x_n).$$

Obie te funkcje przyjmują wartości w K^n (bo $x_1^2+\ldots+x_n^2\le 1$) i są – jako rzutowania – ciągłe. Ponadto na części wspólnej obu półsfer (czyli na sferze S^{n-1}, tam, gdzie ostatnia współrzędna równa jest 0) są one takie same i równe funkcji identycznościowej. Zdefiniujemy dwie nowe funkcje prowadzące z K^n do K^n. Niech $f_+(x)=f(x)$, zaś $f_-(x)=\|x\|f(x)$. Jeżeli teraz rozważymy dwa złożenia: $(f_+\circ\varphi_+)$ i $(f_-\circ\varphi_-)$, to łatwo zauważymy, że częścią wspólną ich dziedzin jest S^{n-1}. Tu zaś funkcje φ_+ i φ_- są identycznościami i w konsekwencji zarówno $f_+\circ\varphi_+$, jak i $f_-\circ\varphi_-$ przyjmują dla punktów należących do S^{n-1} takie same wartości (zgodnie z definicjami, $f_+(\varphi_+(x)) = f_+(x) = f(x)$ i $f_-(\varphi_-(x)) = f_-(x) = \|x\|f(x) = f(x)$, gdyż S^{n-1} jest brzegiem K^n i dla punktu x należącego do S^{n-1} norma x wynosi 1). Dziedziną pierwszego złożenia jest górna półsfera, drugiego – dolna, na części wspólnej tych półsfer wartości obu złożeń są takie same, możemy zatem określić kolejną funkcję: $F: S^n\to K^n\subset\mathbf{R}^n$; dla punktu x z górnej półsfery definiujemy $F(x)$ jako $(f_+\circ\varphi_+)(x)$, z dolnej zaś jako $(f_-\circ\varphi_-)(x)$. Ze względu na wykazaną powyżej własność F jest zdefiniowana poprawnie; w matematyce takie F nazywa się sklejeniem $(f_+\circ\varphi_+)$ oraz $(f_-\circ\varphi_-)$. Obie „klejone" funkcje są (na odpowiednich półsferach) ciągłe, jako złożenia funkcji ciągłych. Całkiem elementarnie można na podstawie tego udowodnić, że także funkcja F jest ciągła. Mamy zatem ciągłe odwzorowanie $F: S^n\to\mathbf{R}^n$ i w tej chwili przygotowaliśmy grunt do skorzystania z twierdzenia o antypodach. Na jego mocy musi istnieć taki punkt $x\in S^n$, że $F(x)=F(-x)$. Punkt taki musi jednak należeć do S^{n-1}! Dzieje się tak dlatego, że gdy weźmiemy dwa punkty antypodalne, to jeden z nich należy do górnej półsfery, a drugi do dolnej. Wartości funkcji F na tych argumentach są równe, a więc i ich normy też. Zgodnie z definicją F dla punktu x z górnej półsfery $\|F(x)\| = \|f(\varphi_+(x))\| = 1$, gdyż f przyjmuje wartości na sferze jednostkowej, natomiast dla punktu x z dolnej półsfery mamy $\|F(x)\| = \|\varphi_-(x)\|\|f(\varphi_-(x))\|$, ta wartość jest równa jeden tylko wtedy, gdy $\|\varphi_-(x)\|=1$, czyli $\varphi_-(x)$ musi należeć do sfery S^{n-1}, a więc na mocy definicji φ_- punkt x musi należeć do sfery S^{n-1}. Znaleźliśmy wobec tego x należący do S^{n-1} (wtedy także i $-x\in S^{n-1}$) o własności $F(x)=F(-x)$ (por. rys. 5). Ostatnie współrzędne punktów x i $-x$ (w przestrzeni $\mathbf{R}^{n+1}$) są zerami, punkty te należą do S_+ i mamy $\varphi_+(x)=x$, $\varphi_+(-x)=-x$. Oznacza to, że $F(x)=f_+(\varphi_+(x))=f_+(x)=f(x)$, zaś $F(-x)=f_+(\varphi_+(-x))=f_+(-x)=f(-x)$. Wykazaliśmy zatem, że $f(x)=f(-x)$ i w ten sposób doszliśmy do tezy naszego lematu.



Rys. 5

Teraz jesteśmy już o krok od twierdzenia Brouwera. Mianowicie z powyższego lematu wynika natychmiast twierdzenie o retrakcie! Istotnie, gdyby istniała retrakcja r kuli K^n na sferę S^{n-1}, spełniałaby ona, jako funkcja ciągła, założenia powyższego lematu. Retrakcja jednak na sferze jest identycznością, więc dla wszystkich punktów należących do S^{n-1} mielibyśmy: $r(x)=x\neq -x = r(-x)$. Nie istniałby zatem punkt ze sfery taki, że $r(x)=r(-x)$, co przeczy tezie lematu wykazanego przed chwilą. Otrzymaliśmy twierdzenie o retrakcie, które, jak wykazaliśmy na początku, jest równoważne twierdzeniu Brouwera. Cel nasz został osiągnięty.

Na zakończenie wypada zwrócić uwagę na to, że oprócz potężnego wyniku, jakim jest twierdzenie Borsuka–Ulama o antypodach, w dowodzie powyższym wykorzystywaliśmy jedynie elementarne fakty z matematyki (tzw. wyższej).