Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Szczegółowy regulamin Klubu 44 zamieściliśmy w *Delcie* 7/1990, a jego skrót – we wszystkich numerach, w których są zadania ligowe (tj. w tym roku z wyjątkiem numerów 11 i 12).

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 97 ($WT=2{,}97$) i 98 ($WT=3{,}06$) z numeru 4/1990

Adam Sikorski	– Lublin	40,58 pkt.
Andrzej Borowski	– Aleksandrów Kuj.	39,92 pkt.
Przemysław Gworys	– Częstochowa	36,56 pkt.
Mariusz Bogacz	– Pińczów	31,91 pkt.
Leszek Motyka	– Kraków	28,47 pkt.
Dzierżysław Lipniacki	– Lublin	18,05 pkt.
Paweł Perkowski	– Szczecin	16,60 pkt.

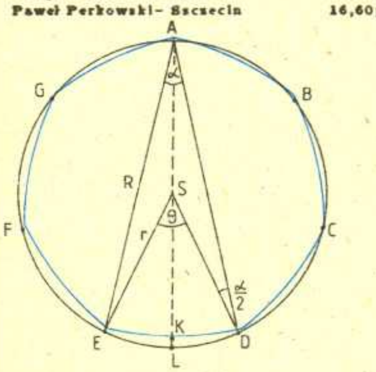
Redaguje dr Andrzej NADOLNY

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 7/1990

Przypominamy treść zadań:

103. Angielska moneta pięćdziesięciopensowa ma kształt zbliżony do graniastosłupa o podstawie siedmiokąta foremnego, z tym że podstawa ograniczona jest nie odcinkami prostych, lecz łukami okręgów, których środki leżą w przeciwległych wierzchołkach. Promienie tych okręgów mają długość 3 cm. Obliczyć w sposób przybliżony, z jaką prędkością moneta ta może się toczyć po poziomej płaszczyźnie, aby nie traciła kontaktu z podłożem. Przyjąć, że dopóki występuje kontakt z podłożem, nie ma poślizgu.

104. Dlaczego refleksy świateł lamp ulicznych obserwowane na mokrej jezdni mają kształt podłużnych smug? Jaki jest kierunek tych smug?



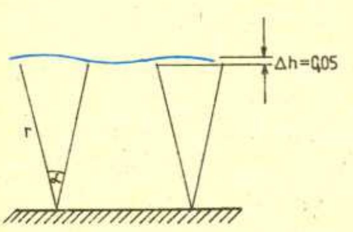
Rys. 1

103. Rysunek 1 przedstawia kontur monety z opisanym na nim okręgiem. Punkt S jest środkiem tego okręgu, a zarazem środkiem masy monety, r jest promieniem tego okręgu. Kąty θ i α są odpowiednio równe: $\theta = 2\pi/7$, $\alpha = \theta/2 = \pi/7$.
Łuk DKE jest fragmentem okręgu o środku w punkcie A, którego promień oznaczymy przez R. Mamy więc $AD = AE = AK = R$, a ponadto $SD = SE = SA = SL = r$. Stąd $KL = 2r - R$. Z trójkąta ADS wynika $R = 2r\cos(\alpha/2)$, wobec czego

$$r = \frac{R}{2\cos(\pi/14)}.$$

Tor środka masy monety jest przedstawiony na rysunku 2. Gdy moneta dotyka podłoża jednym ze swych „rogów" (punkty A, B, C, D, E, F, G), S zakreśla łuk o promieniu r i środku nieruchomym względem podłoża, a działająca nań siła odśrodkowa zmniejsza nacisk monety na podłoże. Aby nie nastąpiła utrata kontaktu z podłożem, siła odśrodkowa $F = mr\omega$ nie może przewyższać ciężaru monety mg (m oznacza tu masę monety, ω – jej prędkość kątową, g – przyspieszenie ziemskie). Stąd wyznaczamy warunek na prędkość kątową:

$$\omega \leq \omega_{gr} = \sqrt{g/r}.$$



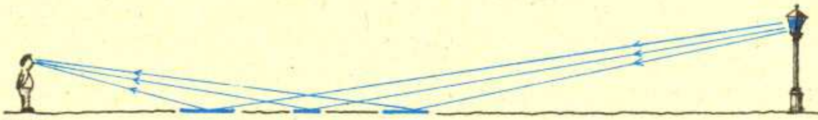
Rys. 2

Wobec przybliżonego charakteru obliczeń zakładamy, że $\omega =$ const. oraz że prędkość liniowa monety $v = r\omega$ (jak dla walca). Graniczna wartość tej prędkości jest zatem równa

$$v_{gr} = r\omega_{gr} = \sqrt{gr} = \sqrt{\frac{gR}{2\cos(\pi/14)}}.$$

Po podstawieniu otrzymujemy $0{,}4\,\mathrm{m/s}$. W rzeczywistości tor środka masy wykonuje pionowe wahania o amplitudzie $\Delta h = KL = 2r - R = 0{,}05r$. Odpowiadają temu zmiany energii potencjalnej o wartości $\Delta E_p = mg\Delta h$, a co za tym idzie – odpowiednie zmiany energii kinetycznej monety $\Delta E_k = -\Delta E_p$.
Przyjmując, że energia kinetyczna monety jest taka sama jak walca toczącego się bez poślizgu, a więc równa $E_k = (3/4)mv^2$, obliczamy $\Delta E_k \approx (1/15)E_k$, skąd wynika, że amplituda wahań prędkości kątowej wynosi około 3 % jej wartości średniej.
Widzimy, że odstępstwa od przyjętych założeń nie są duże, a ponadto występuje ich wzajemna kompensacja: z jednej strony falisty tor środka masy jest dłuższy od prostoliniowego, z drugiej zaś strony średnia prędkość kątowa jest większa od wartości występującej w chwili, gdy środek masy osiąga największą wysokość, która to wartość posłużyła do obliczenia krytycznej prędkości kątowej.

104. Mokra jezdnia przypomina zbiór lusterek o różnych kątach pochylenia. Przy przypadkowym ustawieniu poszczególnych lusterek najczęściej wpadają do oka idące od lampy promienie odbite w pobliżu płaszczyzny, przechodzącej przez oko i lampę i prostopadłej do jezdni (rys. 3). Stąd obserwowane refleksy mają postać smug rozciągniętych wzdłuż kierunku obserwator – lampa.



Rys.3

Szczególnie dobrze widoczne są smugi od reflektorów samochodowych – dają się one zauważyć nawet na suchym asfalcie.

Czołówka ligi zadaniowej

Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 197 (WT=2,50) i 198 (WT=1,84) z numeru 10/1989

Adam Czornik	– Bytom	43,59pkt.
Kazimierz Serbin	– Sanok	43,36pkt.
Andrzej Krzysztofowicz	– Gdańsk	43,17pkt.
Jerzy Janowicz	– Bolesławiec	41,95pkt.
Krzysztof Zawisławski	– Warszawa	41,45pkt.
Henryk Kornacki	– Augustów	41,29pkt.
Dariusz Rybacki	– Kraśnik	40,18pkt.

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 7/1990

Przypominamy treść zadań:

205. Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg Ω. AK, BL, CM są trzema równoległymi cięciwami okręgu Ω. Punkty P, Q, R są odpowiednio rzutami prostokątnymi punktów K, L, M na proste BC, CA, AB. Dowieść, że:

(a) proste KP, LQ, MR przecinają się w punkcie leżącym na Ω;

(b) punkty P, Q, R leżą na prostej równoległej do trzech danych cięciw.

206. Wyznaczyć najmniejszy wykładnik naturalny $n \geq 2$, dla którego zapis dziesiętny liczby 44^n rozpoczyna się i kończy grupą cyfr 44.

205. Użyjemy języka liczb zespolonych. Zakładamy, że Ω jest okręgiem jednostkowym na płaszczyźnie zespolonej, punkty A, B, C są reprezentowane przez liczby zespolone a, b, c o module 1, a wspólny kierunek rozważanych cięciw jest „pionowy" (równoległy do osi urojonej). Punkty K, L, M są wówczas reprezentowane (odpowiednio) przez liczby $\overline{a} = 1/a$, $\overline{b} = 1/b$, $\overline{c} = 1/c$

Niech z będzie liczbą reprezentującą punkt R. Punkt ten leży na prostej AB, a odcinek MR jest do niej prostopadły. Istnieją więc liczby rzeczywiste t, s, takie, że

$$z = a + t(b-a) \qquad \text{oraz} \qquad z = \frac{1}{c} + \mathrm{i}s(b-a)\,. \tag{1}$$

Przez przyrównanie prawych stron otrzymujemy równość

$$t - \mathrm{i}s = \frac{\frac{1}{c} - a}{b - a}\,.$$

Oznaczając liczbę $t - \mathrm{i}s$ przez w mamy więc

$$t = \mathrm{Re}\, w = \frac{1}{2}(w + \overline{w}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{1}{c} - a}{b - a} + \frac{c - \frac{1}{a}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{1}{c} - a}{b - a} + \frac{b - abc}{b - a}\right),$$

co po podstawieniu do pierwszej równości (1) daje

$$z = \frac{1}{2}\left(a + b + \frac{1}{c} - abc\right). \tag{2}$$

Niech X będzie punktem reprezentowanym przez liczbę $-abc$; oczywiście, $X \in \Omega$. Wykażemy, że punkt ten leży na prostej MR. Wystarczy w tym celu sprawdzić, że wektory $\overrightarrow{XM}$ i $\overrightarrow{XR}$ (reprezentowane odpowiednio przez liczby zespolone $(1/c) + abc$ oraz $z + abc$) są równoległe, czyli że iloraz tych liczb jest liczbą rzeczywistą. Zgodnie z (2) mamy

$$\frac{z + abc}{\frac{1}{c} + abc} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a + b + \frac{1}{c} + abc}{\frac{1}{c} + abc} = \frac{1}{2}(1 + v)\,, \tag{3}$$

gdzie

$$v = \frac{a+b}{\frac{1}{c} + abc} = \frac{(a+b)/ab}{\left(\frac{1}{c} + abc\right)/ab} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\frac{1}{abc} + c} = \overline{v}\,.$$

Zatem istotnie iloraz (3) jest liczbą rzeczywistą, czyli X jest punktem prostej MR. W określeniu punktu X (jako wyznaczonego przez liczbę $-abc$) żadna ze zmiennych nie jest wyróżniona. Zatem X leży także na prostych KP i LQ. To dowodzi tezy (a).

Dla dowodu (b) zauważmy, że z (2) wynika równość

$$\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\,(a + b + c - abc)\,.$$

To wyrażenie jest niezmiennicze względem permutacji symboli a, b, c. Zastępując z przez liczbę reprezentującą punkt P lub punkt Q otrzymalibyśmy tę samą wartość części rzeczywistej. To znaczy, że punkty P, Q, R leżą na jednej prostej „pionowej".

206. Najpierw sprawdzamy, że

$$44^n \begin{cases} \equiv 44 \pmod{100} & \text{dla } n = 11 \\ \not\equiv 44 \pmod{100} & \text{dla } n = 2,3,4,5,6,7,8,9,10. \end{cases}$$

Stąd wniosek, że w ciągu (44^n) liczby o jednakowej dwucyfrowej końcówce występują cyklicznie, z okresem 10. W szczególności końcówkę ...44 otrzymujemy (tylko) dla wykładników postaci $n = 10k + 1$.

Poszukujemy więc najmniejszej naturalnej wartości $k \geq 1$, dla której istnieje wykładnik naturalny m, taki, że

$$44 \cdot 10^m < 44^{10k+1} < 45 \cdot 10^m\,.$$

W języku logarytmów dziesiętnych jest to równoważne warunkowi, by mantysa liczby $k\alpha$ należała do przedziału $(0;\delta)$, gdzie $\alpha = 10\log 44$, $\delta = \log(45/44)$. Korzystając z oszacowań

$$16{,}4345 < \alpha < 16{,}43453\,, \quad 0{,}009 < \delta < 0{,}01$$

stwierdzamy (wystarczy do tego zwykły kalkulator kieszonkowy), że minimalną wartością k, spełniającą ten warunek, jest $k = 145$:

$$2383 < 145\alpha < 2383{,}007\,.$$

Wobec tego szukanym wykładnikiem jest $n = 1451$.