

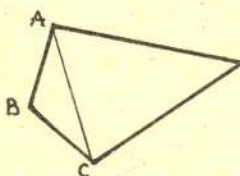
Jak obliczyć momenty bezwładności bez całkowania

**Radostaw
SZMYTKOWSKI**



Roswiązanie zadania M 581.

Oznaczmy największą z odległości przez M , a najmniejszą przez m . W każdym czworokącie wypukłym istnieje kąt nieostry, np. $|\angle ABC| \geq 90^\circ$.

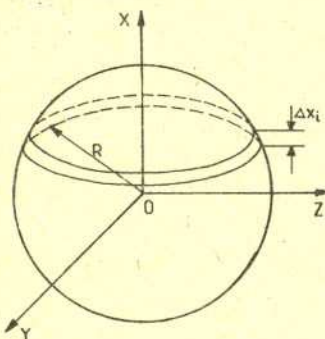


Stąd na mocy twierdzenia kosinusów

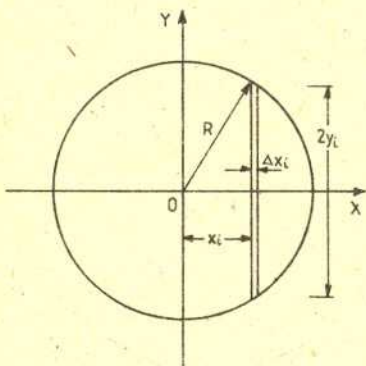
$$M^2 \geq AC^2 \geq AB^2 + BC^2 \geq m^2 + m^2 = 2m^2,$$

co daje

$$\frac{M}{m} \geq \sqrt{2}.$$



Rys. 1. Sposób podziału kuli i powłoki sferycznej na cienkie plasterki o grubości Δx_i i masie Δm_i każdy.



Rys. 2. W przypadku kuli i powłoki sferycznej rysunek przedstawia rzut rysunku 1 na płaszczyznę XY . W przypadku cienkiego dysku rysunek pokazuje sposób podziału dysku na cienkie płyty.

Znalezienie momentu bezwładności dowolnej bryły względem wybranej osi sprowadza się zazwyczaj do obliczenia całki oznaczonej. W szczególnych przypadkach brył o wysokiej symetrii znane są również metody pozwalające na obliczanie momentów bezwładności względem osi głównych w sposób elementarny, bez korzystania z rachunku różniczkowego lub całkowego. W zadaniu F 47 (*Delta* 11/1977) zaprezentowano prostą metodę znalezienia momentu bezwładności jednorodnej kuli względem osi przechodzącej przez jej środek. Nie jest to jedyna metoda – i poniżej przedstawimy inny sposób obliczenia momentu bezwładności kuli, a także cienkiego dysku i powłoki sferycznej.

Zanim jednak przystąpimy do zapoznania Czytelnika z tą metodą, przypomnijmy dwa twierdzenia, z których będziemy korzystali w trakcie obliczeń.

1. Twierdzenie o osiach równoległych (twierdzenie Steinera). Moment bezwładności I_A ciała o masie M względem dowolnej osi A jest równy

$$I_A = I_O + M \cdot d^2,$$

gdzie I_O jest momentem bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy ciała i równoległej do A , natomiast d jest odległością między tymi osiami.

2. Twierdzenie o osiach prostopadłych. Niech I_X i I_Y oznaczają momenty bezwładności cienkiej, płaskiej płyty o dowolnym kształcie względem dwóch wzajemnie prostopadłych osi OX i OY leżących w płaszczyźnie płyty. Moment bezwładności I_Z płyty względem osi OZ prostopadłej do OX i OY i przechodzącej przez ich punkt przecięcia O jest równy

$$I_Z = I_X + I_Y.$$

Z twierdzenia 2 wynika, że moment bezwładności cienkiego pierścienia o masie m i promieniu r względem osi leżącej w jego płaszczyźnie i przechodzącej przez środek masy jest równy

$$I_X = \frac{1}{2} \cdot I_Z = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2.$$

Proponujemy Czytelnikowi, aby pokazał, korzystając jedynie z twierdzenia 1, że moment bezwładności cienkiego pręta o masie m i długości l względem osi przechodzącej przez środek masy i prostopadłej do osi pręta jest równy

$$I = \frac{1}{12} \cdot m \cdot l^2.$$

Weźmy teraz cienki dysk, powłokę sferyczną oraz kulę i podzielmy którąkolwiek z tych brył na cienkie plasterki o grubości Δx_i ; każdy, prostopadle do osi OX . Sposób dokonania takiego podziału dla powłoki sferycznej i dla kuli przedstawiono na rysunku 1. Z rysunku 2 wynika, że moment bezwładności takiego plasterka względem osi OX jest równy

$$\Delta I_{x_i} = \beta \cdot \Delta m_i \cdot y_i^2,$$

gdzie β jest stałą bezwymiarową zależną od rodzaju bryły, Δm_i jest masą i -tego plasterka, natomiast y_i jest odległością pokazaną na rysunku 2. Dla powłoki sferycznej i dla kuli słuszność powyższego wzoru wynika z symetrii obrotowej obu tych brył. Na mocy twierdzenia 1 otrzymujemy, że moment bezwładności tego samego plasterka względem osi OY jest równy

$$\Delta I_{y_i} = \alpha \cdot \Delta m_i \cdot y_i^2 + \Delta m_i \cdot x_i^2,$$

gdzie α jest stałą bezwymiarową, a x_i jest odległością plasterka od płaszczyzny YZ .

Moment bezwładności całej bryły względem osi OX i OY są równe odpowiednio $I_x = \sum_i \Delta I_{x_i}$, oraz $I_y = \sum_i \Delta I_{y_i}$.

Z symetrii obrotowej każdej z trzech rozpatrywanych brył względem osi OZ wynika, że $I_x = I_y$, a więc

$$(1) \quad I_x = \sum_i \beta \cdot \Delta m_i \cdot y_i^2 = \sum_i (\alpha \cdot \Delta m_i \cdot y_i^2 + \Delta m_i \cdot x_i^2) = I_y.$$

Korzystając ze związku

$$(2) \quad x_i^2 + y_i^2 = R^2 \quad (= \text{const.}),$$

gdzie R jest promieniem pokazanym na rysunku 2, otrzymamy

$$(3) \quad (1 + \beta - \alpha) \cdot \sum_i \Delta m_i \cdot y_i^2 = \sum_i \Delta m_i \cdot R^2 = m \cdot R^2,$$

gdzie m oznacza masę całej bryły. Stąd ostatecznie

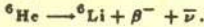
$$(4) \quad I_x = I_y = \beta \cdot \sum_i \Delta m_i \cdot y_i^2 = \frac{\beta}{1 + \beta - \alpha} \cdot m \cdot R^2.$$

FIZYCZNE NOWINKI

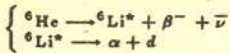
Neutronowe halo a emisja opóźnionych deuteronów

Od paru lat wiadomo, że niektóre lekkie jądra o nadmiarze neutronów, jak np. ${}^6\text{He}$ (2 protony, 4 neutrony), ${}^8\text{He}$ czy ${}^{11}\text{Li}$ mają nadspodziewanie duże jak na posiadaną liczbę nukleonów rozmiary. Wygląda to tak, jakby zewnętrzne neutrony w tych jądrach tworzyły coś w rodzaju aureoli (po angielsku halo znaczy aureola), co można wytłumaczyć niską energią wiązania tych neutronów.

Dotychczas uważano, że rozpad jądra ${}^6\text{He}$ polega w 100% na jednokrotnym rozpadsie β^- do stanu podstawowego ${}^6\text{Li}$:



Jednakże istnienie aureoli neutronowej nasunęło pomysł eksperymentu mającego na celu obserwację bardzo rzadkich rozpadów ${}^6\text{He}$ polegających na rozpadsie β^- do stanów niezwiązanych deuteronu i cząstki α :



W tym scenariuszu jeden z neutronów tworzących halo podlega rozpadowi β^- stając się protonem, a wiążąc się z drugim neutronem tworzy deuteron. Ponieważ wszystko to zachodzi na peryferiach jądra, deuteronowi może udać się opuścić pole przyciągania jądrowego. Eksperymentalnie takie egzotyczne rozpady objawiałyby się emisją opóźnionych deuteronów. Rozpad β^- rządony jest bowiem oddziaływaniem słabym, jest więc procesem wolnym ($\sim 10^{-1}$ s); emisja deuteronu rządona jest oddziaływaniem silnym, czas jest więc bardzo krótki ($\sim 10^{-21}$ s). Jednakże całkowity półokres rozpadu wyznaczony jest przez wolniejszą składową, a stąd wynika opóźnienie emisji deuteronów.

Główną przeszkodą ograniczającą możliwości badań jąder bardzo neutrono-nadmiarowych, a więc bardzo odległych od ścieżki stabilności, są trudności w otrzymaniu odpowiednich intensywności wiązki tych jąder. Ma to zasadnicze znaczenie przy badaniach procesów bardzo mało prawdopodobnych.

Za pomocą separatora masy ISOLDE w CERNie udało się uzyskać rekordowo duże intensywności wiązki ${}^6\text{He}$ – rzędu 10^7 jąder na sekundę. Jądra ${}^6\text{He}$ osadzane były na cienkiej folii węglowej. Detektory cząstek naładowanych umieszczone po przeciwnych stronach folii zarejestrowały odpowiednio cząstki α i deuterony w koincydencji, tak jak to wynika z zasady zachowania energii i pędu (rozpad w spoczynku, a więc w przeciwnych kierunkach). Prawdopodobieństwo rozpadu β^- , po którym następuje emisja deuteronu, zostało wyznaczone na 10^{-6} . Oznacza to, że na milion rozpadów β^- do stanu podstawowego ${}^6\text{Li}$ zdarza się jeden rozpad β^- , po którym możliwa jest jeszcze emisja deuteronu. Tak więc przewidywania teoretyczne nowej egzotycznej drogi rozpadu znalazły potwierdzenie doświadczalne. Planowane są poszukiwania podobnego typu rozpadów w innych neutrono-nadmiarowych jądrach, takich jak ${}^{11}\text{Li}$, ${}^{14}\text{Be}$, ${}^{17}\text{B}$.

Warto odnotować, że w pracach tych bierze udział fizyk z Uniwersytetu Warszawskiego, dr hab. W. Kurcwick.

Lidia GOETTIG

Wstawiając do wzoru (4) odpowiednie wartości α i β otrzymamy momenty bezwładności rozpatrywanych trzech brył.

(a) Dla cienkiego dysku otrzymany plasterek jest prętem o długości $l = 2y_i$, a więc $\alpha = 0$ i $\beta = 1/3$. Korzystając z twierdzenia 2 ($I_x = I_y$) dostajemy

$$I_x = 2 \cdot I_x = \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2.$$

(b) W przypadku powłoki sferycznej otrzymany przekrój jest cienkim pierścieniem, czyli $\beta = 1$ oraz, na mocy twierdzenia 2, $\alpha = \beta/2 = 1/2$, a stąd

$$I_x = I_x = \frac{2}{3} \cdot m \cdot R^2.$$

(c) Dla kuli plasterki jest cienkim dyskiem. Z (a) otrzymujemy $\beta = 1/2$, a korzystając jeszcze raz z twierdzenia 2 mamy $\alpha = \beta/2 = 1/4$, skąd wynika, że

$$I_x = I_x = \frac{5}{8} \cdot m \cdot R^2.$$

A może ktoś z Czytelników znajdzie jeszcze inną metodę obliczania momentów bezwładności powyższych brył bez całkowania? Jeżeli tak, czekamy na informacje.

Patrz w niebo

Kilkakrotnie w dziejach astronomii zachodziła konieczność powiększenia (i to znacznego) skali odległości – inaczej mówiąc, bywało, że nagle pewne obserwacje zmuszały do uznania, że Wszechświat jest większy, niż nam się dotychczas zdawało. Konsekwencje takiej rewolucji można sobie łatwo wyobrazić.

Ale bywało i odwrotnie. Niedawno np. pojawiły się argumenty za tym, że nasza Galaktyka jest trochę mniejsza niż myślimy. Rozmiarów Galaktyki nie można wyznaczyć metodą paralaks trygonometrycznych, do tych odległości rozmiary orbity ziemskiej są zbyt małe. Daje się mierzyć paralaksę (tj. kąt, pod którym z badanej gwiazdy byłoby widać promień ziemskiej orbity) nie mniejszą od $0,01''$, a zatem w tym sensie „uczciwie” wyznacza się odległości nie większe niż 100 pc. Dla obiektów bardziej odległych stosuje się wiele różnych metod, wśród nich metodę wykorzystującą znane skądinąd prawo rotacji Galaktyki, czyli zależność prędkości obiegowej gwiazd wokół centrum Galaktyki od odległości od tego centrum. W metodzie tej mierzy się ruch własny obiektu (przesunięcie na niebie w jednostce czasu) oraz prędkość radialną. Pojedynczy obiekt może mieć prędkość znacznie odbiegającą od średniej w jego okolicy Galaktyki, dlatego mierzy się ruchy własne i prędkości radialne wielu obiektów, co do których jest uzasadnione przypuszczenie, że leżą blisko siebie, prędkości te uśrednia się i tak – przy przyjętym z góry prawie rotacji Galaktyki – wyznacza się albo ich odległość od Słońca, albo ich odległość od centrum Galaktyki, albo też sprawdza się ogólną spójność całego modelu Galaktyki. Znaczący to, że w ten sposób można też sprawdzić, czy do nowych obserwacji pasuje np. odległość Słońca od jądra Galaktyki albo wspomniane prawo rotacji.

Grupa amerykańskich astronomów zastosowała kilka lat temu tę metodę do około 20 maserowych radioźródeł położonych w odległości (prawdopodobnie) kilkuset parseków od jądra Galaktyki. Obiekty te to gazowo-pyłowe obłoki wielkości, powiedzmy, Układu Słonecznego, otaczające jasne gwiazdy i promieniujące z wielką mocą w bardzo wąskich liniach odpowiadających emisji przez proste cząsteczki, jak np. wody, tlenku krzemu czy hydroksylu. Amerykańscy astronomowie za pomocą techniki interferometrii wielkobazowej wyznaczyli ruchy własne maserów w radioźródle *Sagittarius B2* Północny z dokładnością do kilkadziesiątu mikrosekund łuku na rok. Wraz z pomiarami prędkości radialnych pozwoliło to na wyznaczenie ich pełnej prędkości w Galaktyce. Okazało się, że spójność modelu Galaktyki byłaby zachowana, gdyby odległość Słońca od jej jądra wynosiła 7 kpc. Jest to nieznacznie, ale wyraźnie mniej niż najczęściej spotykana w tradycyjnych podręcznikach wartość 10 kpc lub nawet 8,6 kpc, rekomendowana przez Kongres Międzynarodowej Unii Astronomicznej z 1985 roku.

Nie ma jasności co do przyczyn tego wyniku. Nie to jednak jest najważniejsze, gdyż nie burzy on wszystkich naszych dotychczasowych poglądów na budowę Galaktyki, a ponadto z pewnością z biegiem czasu zagadka się wyjaśni i wzbogacimy się tym samym o jeszcze jedną informację. Na razie jednak warto zdać sobie sprawę z tego, że ciekawych i zaskakujących faktów można doszukać się w tak, zdawałoby się, nieciekawym zagadnieniu jak wyznaczanie odległości Słońca od centrum Galaktyki po raz nie wiadomo który z rzędu.

dr Tomasz KWAST