Bardzo łatwe, jeśli się już zobaczy

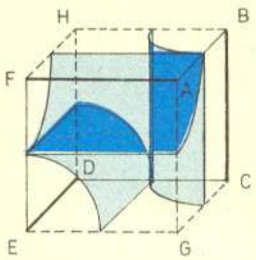
Zadanie jest takie:

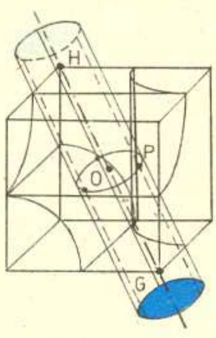
Jaki jest największy promień r walca, który zmieści się w otworze, powstałym pomiędzy trzema, parami stycznymi, walcami o promieniu R, mającymi osie o kierunkach parami prostopadłych.

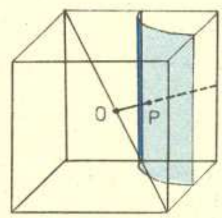
Jak to widać na okładce (i na rysunku poniżej), takie trzy jednakowe walce wyznaczają w naturalny sposób pewien sześcian. Oznaczmy mianowicie przez AB, CD, i EF najkrótsze, a więc przechodzące przez punkty styczności, odcinki łączące osie walców. Z tego, że najkrótszy odcinek łączący proste skośne jest do nich obu prostopadły oraz z założonej prostopadłości kierunków osi wynika, iż łamana zamknięta $ABCDEF$ ma wszystkie kąty proste i co trzecie jej odcinki są równoległe. Zatem składające się na nią fragmenty osi walców – odcinki BC, DE i FA – są tej samej długości co odcinki łączące osie. Wszystkie mają długość $2R$. Gdy to spostrzeżemy, wyobrażenie sobie „brakujących" wierzchołków G i H sześcianu jest już kwestią chwili.

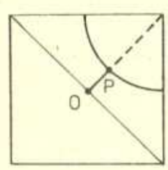
Zwróćmy uwagę na to, co „dzieje się" w sześcianie. Otóż sześcian, wraz z mieszczącymi się w nim fragmentami walców, ma oś obrotową – jest nią jego przekątna GH. Jeśli obrócimy sześcian względem tej prostej o 120°, punkt A przejdzie na C, C na E, E na A i podobnie B na D, D na F i F na B. Cała więc figura (sześcian i walce) nałoży się na siebie i, gdybyśmy nie oznaczyli punktów literami, nie moglibyśmy jej odróżnić przed i po obrocie. Wynika stąd, że wszystkie walce są tak samo odległe od prostej GH. Oznaczmy najbliższy GH punkt jednego z walców przez P. Jeśli będziemy go obracali wokół GH, zatoczy on okrąg leżący w płaszczyźnie prostopadłej do GH, styczny do wszystkich walców. Zatem walec o osi GH i promieniu równym promieniowi tego okręgu jest poszukiwanym walcem o największym promieniu.

Oto uzasadnienie. Ponieważ wszystkie punkty styczności leżą w jednej płaszczyźnie, więc najwieksza kulka, jaka przejdzie przez otwór między danymi walcami, ma ten sam promień co okrąg przechodzący przez punkty styczności. Ale przez każdy z poszukiwanych walców da się przesunąć kulka o równym mu promieniu. Zatem walec nie może mieć większego promienia niż okrąg przechodzący przez punkty styczności. Pozostaje jeszcze znalezienie tego promienia. W tym celu wystarczy nam zwrócenie uwagi tylko na jeden walec w sześcianie i zrzutowanie tej figury na płaszczyznę prostopadłą do osi tego walca. Rachunki tak proste, że wstyd je przytaczać, dają wynik $r = R(\sqrt{2} - 1)$.









Zadanie zaczerpnąłem ze zbiorku И.Ф. Шарыгин, Задачи по геометрии, Стереометрия, Библиотечка „Квант", 31, „Наука", 1984.

M.K.

Zadania

Redaguje mgr Michał WOJCIECHOWSKI

M 577. Czy $\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}$ może być liczbą całkowitą dla $1 \leq m < n$?
Rozwiązanie na str. 6

M 578. Udowodnić, że:

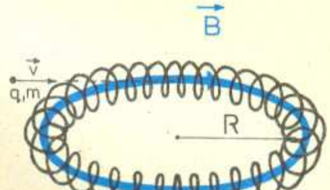
a) liczby postaci $2^{2^k} + 1$ są parami względnie pierwsze,

b) liczb pierwszych mniejszych od n jest więcej niż $\log_2 \log_2 n$.
Rozwiązanie na str. 7

M 579. Przypuśćmy, że wielomian P nie ma pierwiastków rzeczywistych. Wykazać, że wielomian $Q(x) = P(x) + \frac{P''(x)}{2!} + \frac{P^{(4)}(x)}{4!} + \ldots$ też nie ma pierwiastków rzeczywistych.
Rozwiązanie na str. 12

Redaguje dr Krzysztof CHARCHUŁA

F 292. Słup cieczy w rurce barometru przedzielony jest niewielką ilością powietrza tworzącego przerwę, której długość w temperaturze $t_0 = 0°C$ wynosi $l_0 = 10$ cm. Znaleźć rozmiar przerwy w temperaturze $t = 20°C$.
Rozwiązanie na str. 11



F 293. Cząstki plazmy o ładunku q i masie m zostają wstrzyknięte do wnętrza toroidalnej cewki o dużym średnim promieniu R. Cewka wytwarza wewnątrz pole magnetyczne lokalnie jednorodne o indukcji $\vec{B}$, skierowane prostopadle do przekroju poprzecznego cewki (rysunek). Prędkość początkowa cząstek plazmy $\vec{v}$ jest niewielka i skierowana wzdłuż kierunku pola $\vec{B}$. Przyjmując (dowód jest trudny), iż cząstki plazmy będą krążyć po okręgu o promieniu bliskim R, wykazać, że jednocześnie będą unoszone w kierunku prostopadłym do płaszczyzny torusa. Znaleźć tę prędkość unoszenia.
Rozwiązanie na str. 10