Tożsamości Eulera

mgr Jarosław GÓRNICKI

Osiągnięcia Leonharda Eulera (1707 – 1783) w matematyce są tak wielkie, że trudno jest wskazać najważniejsze z nich. Przyjrzyjmy się kilku tożsamościom.

Podstawowe własności funkcji ς, w tym hipotezę Riemanna, przedstawili E.T. Whittaker, G.N. Watson w *Kursie analizy współczesnej* cz.II, PWN 1968.

W teorii liczb ważną rolę odgrywa funkcja, zwana obecnie funkcją „dzeta" Riemanna

$$\varsigma(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}. \tag{1}$$

Rozważmy ją dla $1 < s$. Wówczas szereg po prawej stronie (1) jest zbieżny, co wynika z oszacowania

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} < 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^s}\mathrm{d}x = \frac{s}{s-1}.$$

Zaskakujący związek funkcji ς z wszystkimi liczbami pierwszymi $p_1 < p_2 < \ldots$ odkrył Euler (1737r.) w postaci równości

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right)}. \tag{2}$$

Równość ta stanowi podstawę analitycznej teorii liczb. Aby ją sprawdzić, zauważmy, że po prawej stronie (2) występuje iloczyn sum ciągów geometrycznych

$$1 + \frac{1}{p_k^s} + \frac{1}{p_k^{2s}} + \frac{1}{p_k^{3s}} + \ldots = \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^s}}, \qquad k = 1, 2, \ldots, \qquad s > 1.$$

Ponieważ występujące tu szeregi geometryczne o wyrazach dodatnich są zbieżne (ich sumy są skończone), więc możemy je mnożyć wyraz po wyrazie. Otrzymamy wtedy

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right)} = \sum \frac{1}{\left(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \ldots p_m^{\alpha_m}\right)^s}, \tag{3}$$

gdzie sumowanie rozciąga się na wszystkie możliwe różne kombinacje wykładników $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, $m = 1, 2, \ldots$. Wobec jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze, szereg po prawej stronie równości (3) jest identyczny z szeregiem (1), co dowodzi poprawności wzoru (2).

Z równości (2) wynika również, że liczb pierwszych jest nieskończenie wiele.

Zajmiemy się teraz wyznaczeniem wartości funkcji

$$\varsigma(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots.$$

W latach 1728 – 1729 obliczono ją z dokładnością do 0,01 (Ch. Goldbach, D. Bernoulli), zaś w 1730 r. James Stirling podał wartość tej sumy z ośmioma dokładnymi znakami dziesiętnymi. Dopiero Euler (1735 r.) obliczył kolejno, że

$$\varsigma(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6},$$

$$\varsigma(4) = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \ldots = \frac{\pi^4}{90},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

aż do wartości ς (12).

Oto elementarne uzasadnienie równości

$$\varsigma(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Punktem wyjścia będzie nierówność

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \qquad \text{prawdziwa dla} \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

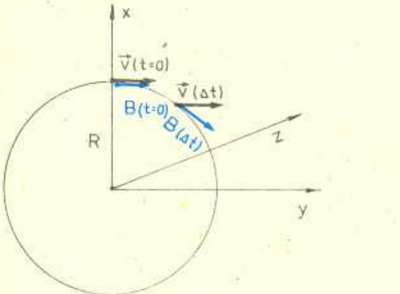
Z niej łatwo otrzymujemy

$$\operatorname{ctg}^2 x < \frac{1}{x^2} < 1 + \operatorname{ctg}^2 x, \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Jeżeli nierówności te wypiszemy dla liczb $x_k = \frac{k\pi}{2m+1}$, $k = 1, 2, \ldots, m$, a następnie dodamy je stronami, to otrzymamy

$$\sum_{k=1}^{m} \operatorname{ctg}^2 \frac{k\pi}{2m+1} < \frac{(2m+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} < m + \sum_{k=1}^{m} \operatorname{ctg}^2 \frac{k\pi}{2m+1}.$$

Rozwiązanie zadania F 298. W stałym jednorodnym polu magnetycznym ruch cząstki naładowanej jest złożeniem ruchu po okręgu prostopadłym do kierunku pola $\vec{B}$, zachodzącego z częstością cyklotronową $\omega = qB/m$ oraz ruchu prostoliniowego ze stałą prędkością (składowa równoległa do wektora $\vec{B}$). Mimo że w chwili początkowej nie mamy jeszcze ruchu cyklotronowego (nie ma składowej prędkości prostopadłej do $\vec{B}$, siła Lorentza również wynosi zero), to ruch ten pojawi się już po infinitezymalnie krótkim czasie Δt (patrz rysunek), pojawi się również siła Lorentza.

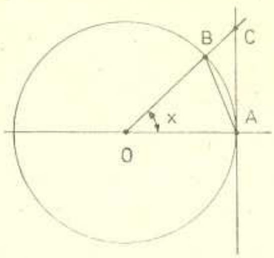


Można pokazać (patrz margines na stronie 12), że jeśli prędkość $v \ll \omega R$, to cząstki poruszać się będą po orbicie, która wynika ze złożenia ruchu po okręgu o promieniu bardzo bliskim R i ruchu cyklotronowego z częstością ω wokół linii pola $\vec{B}$ (po okręgu o promieniu $v^2/(\omega^2 R) \ll R$). Ale to nie wszystko. Jeśli cząstki poruszają się po okręgu o średnim promieniu R, to musi wystąpić siła dośrodkowa utrzymująca je na tej orbicie kołowej. Jest to składowa radialna siły Lorentza. Daje ją składowa prędkości v_z, ponieważ $\vec{B}$ ma kierunek styczny do okręgu. Stąd:

$$\frac{mv^2}{R} = Bv_z q, \text{ czyli } v_z = \frac{mv^2}{qRB}.$$

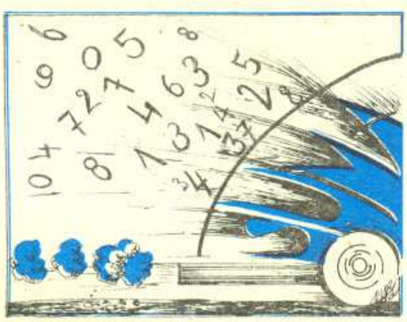
Jest to właśnie średnia prędkość unoszenia plazmy w kierunku osi z, poza płaszczyznę torusa.

Gdybyśmy chcieli wykorzystać ten wzór do obliczenia wartości π z dużą dokładnością, warto zastosować „Przyspieszenie (sumowania)" przedstawione w *Delcie* 9/1988.



Rozwiązanie zadania F 292.
Ciśnienie w przerwie z powietrzem równe jest ciężarowi słupa cieczy nad przerwą podzielonemu przez powierzchnię przekroju rurki. Przy zmianie temperatury zmieni się zarówno wysokość słupa cieczy, jak i jego gęstość, ale masa i ciężar pozostaną takie same. Ponieważ rozszerzalność cieplną rurki można zaniedbać (wobec rozszerzalności cieczy), więc ciśnienie w przerwie pozostanie bez zmian. Stosując do powietrza równanie stanu gazu doskonałego ($pV \sim T$) znajdujemy, że stosunek objętości zajmowanych przez powietrze w różnych temperaturach jest równy stosunkowi tych temperatur. Zatem

$$l = l_0 \cdot \frac{T}{T_0} = 10,7 \text{ cm}.$$



Liczby Bernoulliego to liczby wymierne wyznaczone przez J. Bernoulliego w 1713 r. Ich wartości początkowe są następujące:
$B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$,
$B_3 = B_5 = B_7 = \ldots = 0$, $B_4 = -\frac{1}{30}$,
$B_6 = \frac{1}{42}, \ldots$

Liczba $\varsigma(3)$ jest niewymierna (Apèry, 1978).

Ponieważ

$$\sum_{k=1}^{m} \operatorname{ctg}^2 \frac{k\pi}{2m+1} = \frac{m(2m-1)}{3}$$

(dowód tej równości podamy w dalszej części), więc

$$\frac{m(2m-1)}{3} < \frac{(2m+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} < m + \frac{m(2m-1)}{3} = \frac{m(2m+2)}{3},$$

skąd

$$\frac{\pi^2}{6}\left(1 - \frac{1}{2m+1}\right)\left(1 - \frac{2}{2m+1}\right) < \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2}{6}\left(1 - \frac{1}{2m+1}\right)\left(1 + \frac{1}{2m+1}\right).$$

Przechodząc teraz z $m \to +\infty$ otrzymujemy oczekiwaną równość

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Pozostały nam do uzasadnienia dwa fakty.
1. Dla $0 < x < \frac{\pi}{2}$ mamy $\sin x < x < \operatorname{tg} x$.
Dowód. W kole o promieniu $r > 0$ rozpatrzmy kąt ostry o mierze łukowej x, cięciwę AB i styczną AC do okręgu w punkcie A (rysunek). Wówczas

$$|\triangle\ OAB| < \text{pole wycinka kołowego } AOB < |\triangle\ OAC|,$$

czyli

$$\frac{1}{2}r^2 \sin x < \frac{1}{2}r^2 x < \frac{1}{2}r^2 \operatorname{tg} x,$$

skąd otrzymujemy tezę.

2. $\sum\limits_{k=1}^{m} \operatorname{ctg}^2 \frac{k\pi}{2m+1} = \frac{m(2m-1)}{3}$.
Dowód. Korzystając ze wzoru de Moivre'a i wzoru Newtona mamy

$$\cos n\varphi + \mathrm{i} \sin n\varphi = (\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^n =$$
$$= \sin^n \varphi (\operatorname{ctg}\varphi + \mathrm{i})^n = \sin^n \varphi \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{i}^k \operatorname{ctg}^{n-k}\varphi.$$

Porównując części urojone tych liczb dostajemy

$$\sin n\varphi = \sin^n \varphi \left(\binom{n}{1} \operatorname{ctg}^{n-1}\varphi - \binom{n}{3} \operatorname{ctg}^{n-3}\varphi + \binom{n}{5} \operatorname{ctg}^{n-5}\varphi - \ldots \right).$$

Niech $n = 2m+1$, wówczas powyższa równość przyjmuje postać

$$\sin(2m+1)\varphi = \sin^{2m+1}\varphi \cdot P_m(\operatorname{ctg}^2\varphi),$$

gdzie P_m jest wielomianem stopnia m postaci

(4) $$P_m(x) = \binom{2m+1}{1} x^m - \binom{2m+1}{3} x^{m-1} + \binom{2m+1}{5} x^{m-2} - \ldots$$

Zauważmy, że dla $\varphi_k = \frac{k\pi}{2m+1}$, $k = 1, 2, \ldots, m$, $\sin(2m+1)\varphi_k = 0$, $\sin\varphi_k \neq 0$, więc wielomian P_m ma m różnych pierwiastków

$$x_k = \operatorname{ctg}^2 \frac{k\pi}{2m+1}, \qquad k = 1, 2, \ldots, m.$$

W związku z tym ma miejsce równość

(5) $$P_m(x) = A\left(x - \operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{2m+1}\right)\left(x - \operatorname{ctg}^2\frac{2\pi}{2m+1}\right)\ldots\left(x - \operatorname{ctg}^2\frac{m\pi}{2m+1}\right).$$

Porównując współczynniki stojące przy wyrażeniach x^m i x^{m-1} w równościach (4) i (5) z łatwością stwierdzamy, że

$$A = \binom{2m+1}{1},$$

$$\binom{2m+1}{3} = A\left(\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{2m+1} + \operatorname{ctg}^2\frac{2\pi}{2m+1} + \ldots + \operatorname{ctg}^2\frac{m\pi}{2m+1}\right),$$

skąd otrzymujemy poszukiwaną równość.

W roku 1740 Euler podał także zależność

$$\varsigma(2n) = \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} |B_{2n}|, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

gdzie B_{2n} są liczbami Bernoulliego. Nie udało się jednak obliczyć analogicznie $\varsigma(2n+1)$ i do tej pory „natura arytmetyczna" tych sum jest jeszcze nie znana.