



dr Paweł KRAWCZYK

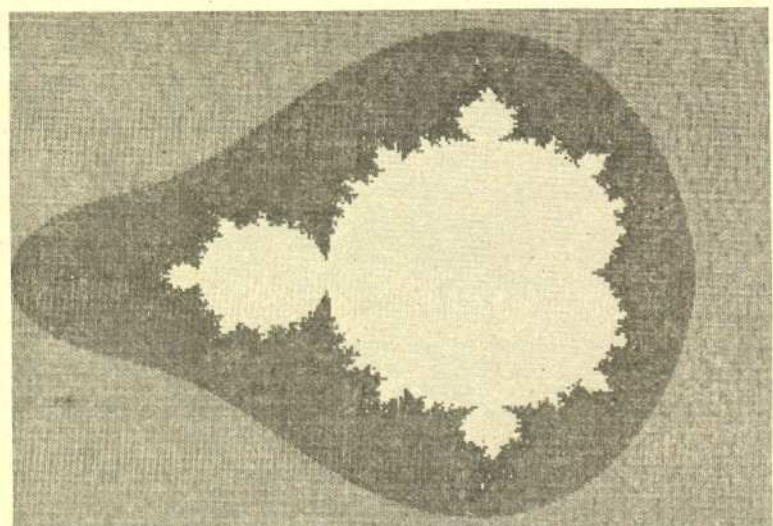
Pojęcie fraktali przeżywa w ostatnich latach niebywałą popularność. Czytelnicy *Delty* mieli możliwość spotkania się z nim już kilkakrotnie (patrz w szczególności *Delta* 2/1986). Artykuły o fraktalach są z reguły bogato ilustrowane rysunkami wygenerowanymi przez komputer. Nic w tym dziwnego, gdyż w rysunkach fraktali kryje się swoiste piękno. I tak, dzięki matematyce wyższej komputer może stać się artystą.

Poniższy program rysuje na ekranie komputera zbiór Julii dla wielomianu  $w(x) = \lambda x(1-x)$ . Najlepsze efekty uzyskuje się podając, w odpowiedzi na pytania stawiane przez program, wartości  $\lambda$  o module rzędu 1, a czynnik skali równy 3 lub 4.

```
10 REM "Program wyświetla zbiór Julii"
20 RANDOMIZE TIMER: KEY OFF: SCREEN 0: LOCATE 1,1
30 INPUT "Podaj lambda (Re(L),Im(L)):" : tLX,LY
40 X=.50001: Y=0
50 S=LX+LX+LY+LY: LX=4*LX/3: LY=4*LY/3
60 INPUT "Podaj czynnik skali:" : SC
70 CX=160:CY=100: SC=2+CX/SC
80 SCREEN 1:COLOR 9,0
90 FOR IX=1 TO 10: GOSUB 140: NEXT IX
100 PSET (INT(SC*(X-.5)+CX),INT(ABS((CY-SC*Y)))):S
110 GOSUB 140
120 ON KEY(1) GOSUB 130: KEY(1) ON: GOTO 100
130 END
140 TX=X: TY=Y: X=TX+LX-TY+LY: Y=TX+LY+TY+LX
150 X=1-X: T=Y: S=SQR(X*X+Y*Y): Y=SQR((S-X)/2): X=SQR((X+S)/2)
160 IF T<0 THEN X=-X
170 IF RND<.5 THEN X=-X: Y=-Y
180 X=(1-X)/2: Y=Y/2
190 RETURN
```

Poniższy program rysuje na ekranie komputera zbiór Mandelbrota. Znaczenie parametrów, o które program pyta użytkownika, zostało wyjaśnione w tekście głównym.

```
10 REM "Program wyświetla zbiór Mandelbrota"
20 KEY OFF: CLS: SCREEN 0: LOCATE 1,1
30 CX=160: CY=100
40 INPUT "Podaj liczbę iteracji (zero oznacza koniec): " : LIMX
50 IF LIMX=0 THEN GOTO 260
60 INPUT "Kiedy zmieniać kolor (n1, n2, n3)? " : NC1%, NC2%, NC3%
70 INPUT "Podaj X-start (>= -2), X-stop (<= 1) " : X0, X1
80 INPUT "Podaj Y-max (<= 1.5) " : YM
90 DX=(X1-X0)/2/(CX-2,0001): DY=YM/(CY-1,0001)
100 SCREEN 1: COLOR 0,0
110 FOR IX=2 TO 2+CX-3
120 X=(IX-2)+DX+X0
130 FOR JX=1 TO CY-1
140 Y=(1-JX)+DY+YM: COUNTX=1: ZR=X: ZI=Y
150 WHILE (COUNTX<LIMX)
160 ZR1=ZR: ZR=ZR1+ZR1-ZI*ZI+X: ZI=2+ZR1+ZI+Y
170 IF ((ZR+ZR1+ZI+ZI)^4) GOTO 200
180 COUNTX=COUNTX+1
190 WEND
200 IF COUNTX<NC1% THEN COL=1 ELSE IF COUNTX<NC2% THEN COL=2 ELSE IF COUNTX<NC3% THEN COL=3 ELSE COL=0
210 PSET (IX,JX),COL: PSET (IX,2+CY-2-JX),COL
220 NEXT JX: NEXT IX
230 DEF SEG=>MB8000: BSAVE "MANDSET,"+STR$(LIMX),0,&H4000: DEF SEG
240 ON KEY(1) GOSUB 20
250 KEY(1) ON: GOTO 240
260 SCREEN 0: WIDTH 80
270 END
```



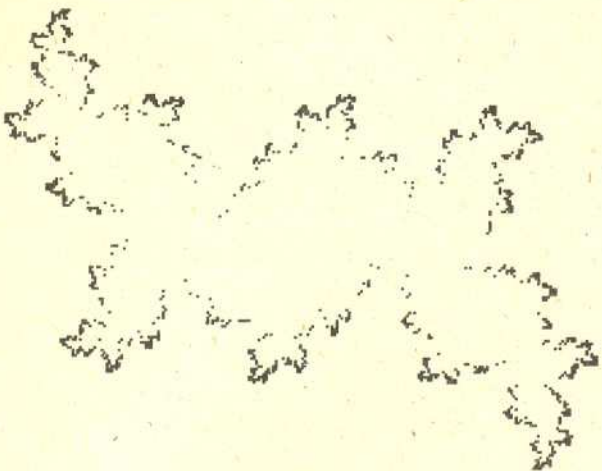
Rys. 1. Wynik działania drugiego programu dla 35 iteracji,  $(n_1, n_2, n_3) = (3, 8, 35)$ . Zakresy osi: pozioma:  $[-2, 1]$ , pionowa:  $[-1, 27; 1, 27]$ .

Warto sobie zdawać sprawę z tego, że pełne uwidocznienie piękna fraktali wymaga, niestety, bardzo drogiego sprzętu. Konieczny jest do tego komputer wyposażony w kolorowy monitor wysokiej rozdzielczości i charakteryzujący się dużą prędkością obliczeń. Zamiast dowodu proponuję porównanie barwnej fotografii z okładki *Delty* 2/1986 z jednokolorowymi figurami wewnątrz tegoż numeru. Nie chodzi tu zresztą wyłącznie o doznania estetyczne. Duża moc obliczeniowa potrzebna jest szczególnie wtedy, gdy chcemy badać jedną z charakterystycznych cech wielu znanych fraktali – samopodobieństwo, czyli powtarzanie się takich samych struktur we wszystkich możliwych skalach.

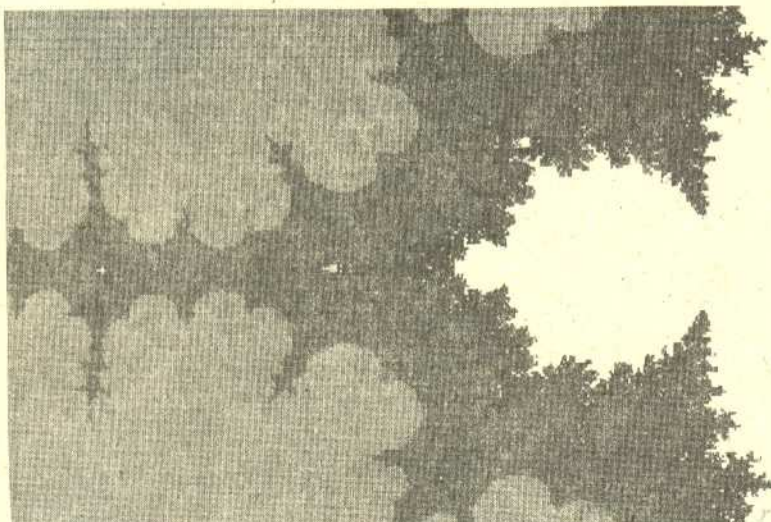
Ci z Czytelników, którzy mają dostęp do komputera osobistego, mogą łatwo przekonać się o słuszności powyższych uwag eksperymentując z dwoma programami, których tekst zamieszczono obok. Programy te zostały napisane w języku BASIC przystosowanym do komputera IBM PC/XT z kolorowym monitorem i kartą graficzną CGA (Czytelnicy dysponujący innym komputerem z łatwością zaadaptują je do swoich potrzeb). Pierwszy z programów rysuje zbiory Julii dla wielomianu  $w(z) = \lambda z(1-z)$ , drugi – nieco bardziej skomplikowany – zbiór Mandelbrota – powiększenie jego fragmentu. Drugi program dojrze ilustruje technikę stosowaną do otrzymywania efektownych, kolorowych rysunków fraktali. Jak wiadomo, zbiór Mandelbrota jest zbiorem liczb zespolonych  $\lambda$ , dla których ciąg

$$(1) \quad w_{k+1} = w_k^2 + \lambda, \quad w_0 = 0,$$

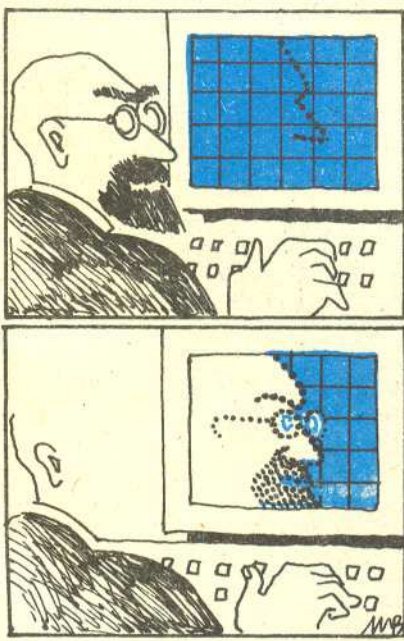
jest ograniczony. W programie warunku tego nie możemy, oczywiście, sprawdzić. W zamian za to sprawdzamy, czy po pewnej skończonej liczbie iteracji moduł  $w_k$  nie przekracza 2 (można udowodnić, że jeśli dla pewnego  $n$  zachodzi  $|w_n| > 2$ , to ciąg (1) jest rozbieżny). Na ekranie monitora zaznaczamy różnymi kolorami punkty, dla których  $|w_n|$  przekracza 2 przy różnych wartościach  $n$ :  $n < n_1$ ,  $n_1 \leq n < n_2$  i  $n_2 \leq n < n_3$ , a jeszcze innym kolorem punkty, których nie możemy wykluczyć po  $n_3$  iteracjach. Wynik takiego działania jest niezwykle efektowny. Niestety, ograniczenia techniczne nie pozwalają nam na jego zaprezentowanie w kolorze. Rysunek 1, będący kopią ekranu, w której różne odcienie szarości reprezentują różne kolory, odbiega daleko pod względem estetycznym od oryginału. Nawet jednak taka kopia wyróżnia się na tle rysunku 2 przedstawiającego wynik pierwszego programu (który, w gruncie rzeczy, wykorzystuje grafikę monochromatyczną).



Rys. 2. Wynik działania pierwszego programu dla  $\lambda = -0,5 - i$ . Czynniki skali wybrano równy 3.



Rys. 3. Powiększenie „głowy żuka” z rysunku 1. W programie drugim wybrano następujące wartości parametrów: 105 iteracji,  $(n_1, n_2, n_3) = (20, 40, 105)$ ,  $\alpha$  pozioma:  $[-1, 46; -1, 36]$ ,  $\alpha$  pionowa:  $[-0, 0365; 0, 0365]$ . Widoczne są już efekty skończonej dokładności obliczeń.



A jak jest z mocą obliczeniową komputera IBM PC? Do wygenerowania rysunku zbioru Julii za pomocą pierwszego programu wystarczy uruchomić go pod interpreterem języka BASIC i poczekać kilka minut. Na rysunek zbioru Mandelbrota trzeba jednak przy takiej metodzie czekać nieznośnie długo. Dlatego też rysunek 1 wykonano za pomocą skompilowanej wersji drugiego programu (co skraca czas wykonania około dziesięciokrotnie). Aby wygenerować rysunek 3 przedstawiający powiększenie „głowy żuka” (ok. 35 razy) z rysunku 1, nawet skompilowany program musi działać przez kilkadziesiąt minut. Przy większych powiększeniach czas działania programu jeszcze się wydłuża, tym bardziej że trzeba zwiększyć dokładność obliczeń. Jest jasne, że tysiąckrotne powiększenie znajduje się poza zasięgiem możliwości (chyba że przepiszemy program na język efektywniejszy niż BASIC, np. C; pozwala to zwiększyć wydajność o czynnik rzędu 10).

Ekran monitora czy też podłączona do komputera drukarka nie są jedynymi miejscami, w których występują fraktale. Przeciwnie, wiele argumentów wskazuje na to, że są one powszechne w otaczającym nas świecie. Krajobraz pasma górskiego, układ gałęzi drzew, kształt plamy atramentu na bibule – modelami matematycznymi wszystkich tych obiektów mogą być właśnie fraktale (patrz *Delta* 10/1989). Niektórzy entuzjaści uważają wręcz, że nie ma właściwie żadnej klasy zjawisk, w której opisie nie ujawniałyby się w jakiś sposób struktury charakterystyczne dla tych dziwnych twórców geometrycznych. Jeśli tak miałyby być naprawdę, moglibyśmy zostawić komputerowe studia fraktali posiadaczom najlepszego sprzętu, a sami zająć się badaniem fraktali fizycznie występujących w świecie.

Wdzięczny i szeroko dostępny obiekt takich badań został zaproponowany przez M.A.F. Gomesa (*Am. J. Phys.* 55 (1987) 649) w postaci swykich kulek wykonanych z dobrze pomiętego papieru.

Na pierwszy rzut oka opis w języku fraktali jest tu bardzo adekwatny – rzeczywisty kształt papieru tworzącego kulkę jest niezmiernie skomplikowany i w znacznym stopniu wykazuje podobieństwo w różnych skalach. Zastanówmy się, czy hipotezę o fraktalnej geometrii papierowych kulek można zweryfikować doświadczalnie. W tym celu zauważmy, że gdyby nasze kulki były wykonane z „porządnego” materiału o ciągłym rozkładzie masy i stałej gęstości  $\rho$ , ich masa wyrażałaby się wzorem

(2) 
$$M = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho,$$

gdzie  $R$  jest promieniem kulki. Jeśli natomiast mielibyśmy do czynienia z dwuwymiarowym odpowiednikiem kulki, czyli kołem o promieniu  $R$ , wzór przybrałby postać:

(3) 
$$M = \pi R^2 \rho$$

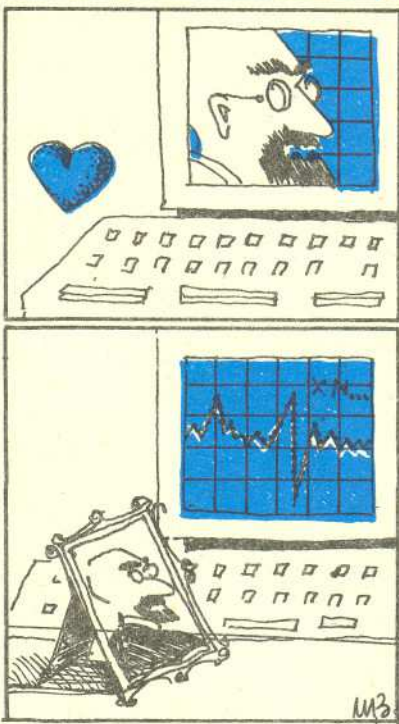
(tym razem  $\rho$  powinno mieć interpretację gęstości powierzchniowej), by wreszcie dla kuli jednowymiarowej, czyli odcinka o długości  $2R$ , stać się

(4) 
$$M = 2R\rho.$$

Wszystkie te wzory możemy zebrać w jeden, jeżeli wprowadzimy do nich wymiar  $d$  kuli. Można wówczas napisać, że

(5) 
$$R = k \cdot M^{1/d},$$

przy czym wiadomo, że współczynnik  $k$  jest proporcjonalny do  $(1/\rho)^{1/d}$ . Tak otrzymany związek można już uogólnić na przypadek geometrii fraktalnej. W tym wypadku  $d$  staje się wymiarem fraktalnym i może przyjmować dowolną wartość rzeczywistą. Jakiej wartości  $d$  możemy spodziewać się dla naszych papierowych kulek?



Jest oczywiste, że  $d$  nie może być większe niż wymiar pełnej kuli, czyli 3. Z drugiej strony, tak naprawdę kulki wykonane są z kartki papieru, której wymiar wynosi 2 (odpowiada to wymiarowi topologicznemu fraktala). A zatem

$$(6) \quad 2 \leq d \leq 3.$$

To już wszystko, co można powiedzieć o wymiarze fraktalnym papierowej kulki bez uciekania się do założeń modelowych, np. o rzeczywistym kształcie przyjmowanym przez kartkę. Określenie  $d$  musi więc być kwestią doświadczenia. Proponuję, aby Czytelnik wykonał takie doświadczenie. Może ono przebiegać następująco: Należy najpierw przygotować zestaw kawałków papieru o różnych, lecz znanych masach. Jest to wymóg dość kłopotliwy ze względu na lekkość papieru i związaną z tym trudność w jego ważeniu. Istnieje jednak prosty sposób, by sobie poradzić. Wystarczy wziąć dwie identyczne „kartki” papieru (np. dwie kartki tej samej gazety, z grubszą podobnie sadrukowane), po czym jedną z nich przeciąć na dwie połowy. Jedną z połówek jeszcze raz przeciąć na pół itd., itd. Jeśli masę najmniejszego z tak utworzonych kawałków przyjąć za jednostkę, to dostaniemy ciąg  $n + 1$  kawałków o masach  $2^{-i}$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ). Oczywiście, ten zbiór można rozszerzyć. Wystarczy wziąć jeszcze jedną kartkę i podzielić ją w innym stosunku.

Po uporaniu się z problemami pomiaru masy musimy sporządzić kulki. Trzeba przy tym zadbać, by kulki sporządzać w zbliżony sposób, a więc np., by pomiar każdej kawałek papieru w równym stopniu, żeby ścisnąć kulki z jednakową siłą, itp. Teras wystarczy już zwykła linijka, aby zmierzyć średnice kulek, i kalkulator, aby dla każdej kulki obliczyć parę  $(\log M, \log R)$ . Oznaczmy następnie na papierze milimetrym lub nawet na kratkowanej kartce wszystkie punkty odpowiadające tak utworzonym parom. Pojawia się pytanie: jak ułożą się nasze punkty? To proste, odpowie ktoś, ponieważ równanie (5) można przepisać w postaci:

$$(7) \quad \log R = \log k + \frac{1}{d} \cdot \log M,$$

a więc – jeśli nasza hipoteza o fraktalnym charakterze kulek jest prawdziwa – wszystkie punkty będą leżeć na prostej o równaniu  $y = \frac{1}{d}x + \log k$ . Niestety, wniosek ten jest błędny i byłoby bardzo dziwne, gdyby punkty doświadczalne rzeczywiście były współliniowe. Musimy bowiem pamiętać, że w przebiegu każdego, a więc i naszego, doświadczenia działa ogromna liczba czynników zakłócających pomiar. Przykładowo, mimo najlepszych chęci nie jesteśmy w stanie zapewnić identycznych warunków formowania kulek; kulki nie są również idealne – pomiar ich promienia zależy trochę od orientacji kulki i linijki. Czynnikiem tego typu nie jesteśmy w stanie kontrolować, a ich wpływ uwzględniamy zakładając, że powodują one przypadkowy rozrzut wartości mierzonej wokół wartości rzeczywistej. A zatem, wynik Twojego, Czytelniku, doświadczenia wyglądać będzie zapewne podobnie do wykresu z rysunku 4. Widać, że punkty doświadczalne leżą w pobliżu pewnej prostej, ale jak znaleźć jej równanie? Odpowiedź nosi nazwę metody najmniejszych kwadratów. Rozważmy zespół  $n$  pomiarów pewnych wielkości  $x$  i  $y$ , które związane są liniową zależnością  $y = ax + b$  (w naszym przypadku  $x = \log M$ ,  $y = \log R$ ). Utwórzmy sumę  $S$  kwadratów różnic wielkości  $y$ : bezpośrednio mierzonej w  $i$ -tym pomiarze,  $y = y_i$ , oraz wynikającej z  $i$ -tego pomiaru wielkości  $x$ ,  $y = ax_i + b$ :

$$(8) \quad S = \sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b))^2.$$

„Właściwą” prostą jest ta, dla której  $S$  przyjmuje wartość minimalną, a więc znikają pochodne cząstkowe liczone względem współczynników  $a$  i  $b$ :

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0.$$

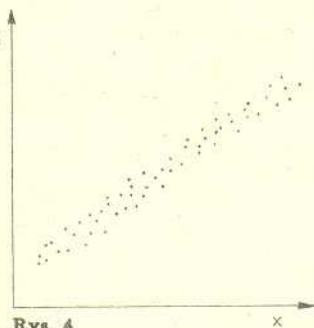
Czytelnik z łatwością może rozwiązać te równania i dostać następujący wynik

$$(10) \quad a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i - n \sum_{i=1}^n x_i y_i}{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 - n \sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i^2}{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 - n \sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Można również ocenić, o ile tak wyznaczone wielkości  $a$  i  $b$  różnią się od ich wartości rzeczywistych. Okazuje się, że z prawdopodobieństwem około 67% moduł różnicy wyznaczonej i rzeczywistej wartości  $a$  wynosi co najwyżej

$$(11) \quad \Delta a = \sqrt{\left(\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2\right) \frac{n}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}},$$

gdzie  $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 - a \sum_{i=1}^n x_i y_i - b \sum_{i=1}^n y_i$ .



Rys. 4



**Rozwiązanie zadania M 577.** Jeżeli  $s$  i  $w$  są nieparzyste oraz  $s < w$ , to  $2^s \cdot s < 2^w \cdot (s+1) < 2^w \cdot w$  i  $s+1$  jest parzysta. To pokazuje, że między dwiema liczbami, w których rozwinięcie na czynniki pierwsze 2 wchodzi z wykładnikiem  $\alpha$ , zawsze znajdzie się liczba, w której rozwinięcie 2 wchodzi z wykładnikiem większym od  $\alpha$ . Stąd wśród liczb  $m, m+1, \dots, n-1, n$  jest dokładnie jedna liczba  $k$ , do której rozwinięcia liczba 2 wchodzi z maksymalnym wykładnikiem  $\beta$ . Oznaczmy przez  $W$  najmniejszą wspólną wielokrotność liczb od  $m$  do  $n$ . Mamy

$$\frac{1}{m} + \dots + \frac{1}{n} = \frac{W}{m} + \frac{W}{m+1} + \dots + \frac{W}{n}.$$

W rozwinięciu  $W$  liczba 2 wchodzi z wykładnikiem  $\beta$ , natomiast wszystkie liczby z mianownika, oprócz  $\frac{W}{k}$ , są parzyste, stąd licznik jest nieparzysty, a mianownik parzysty. Zatem nie jest to liczba całkowita.



Analogiczna wielkość dla parametru  $b$  wynosi:

$$(12) \quad \Delta b = \sqrt{\left(\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2\right) \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}}$$

Wielkości  $\Delta a$  i  $\Delta b$  są dobrą miarą błędów mierzonych parametrów  $a$  i  $b$ . Piszemy na ogół

$$a = a_{\text{mierzone}} \pm \Delta a.$$

Używając powyższej metody możemy wyznaczyć wymiar fraktalny  $d$  i jego błąd. Hipoteza o fraktalnym charakterze kulek papierowych będzie uzasadniona, jeśli

$$\frac{\Delta d}{d} \ll 1.$$

Oczywiście, powyższe rozważania nie uwzględniają możliwych błędów systematycznych (np. mocniejszego ściskania dużych kulek niż małych). Aby zminimalizować tego typu efekty, można np. wykonać opisane doświadczenie w grupie kilku osób. Należy jednak zadbać, aby wszyscy dysponowali takim samym rodzajem papieru. Okazuje się bowiem, że wymiar fraktalny  $d$  jest różny dla różnych rodzajów papieru. Czytelnik może się o tym sam przekonać i spróbować wyjaśnić tę zależność. A może istnieje korelacja między jakością i ilością informacji zawartej na papierze a jego wymiarem fraktalnym?

### Rozwiązanie zadania M 578.

- a) Dowód wynika stąd, że jeżeli  $2^{2^m} \equiv -1 \pmod{p}$ , to  $2^{2^{m+k}} = (2^{2^m})^{2^k} \equiv 1 \pmod{p}$ .
- b) Z każdej z liczb postaci  $2^{2^d} + 1$ , mniejszej od  $n$ , weźmy po jednej liczbę pierwszej z jej rozwinięcia na czynniki. Z a) wynika, że te liczby pierwsze są parami różne, stąd liczb pierwszych mniejszych od  $n$  jest co najmniej tyle, ile liczb postaci  $2^{2^d} + 1$  mniejszych od  $n$ .

Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego

## KORESPONDENCYJNY KLUB FIZYKÓW

*Drodzy Członkowie i Sympatycy Klubu!*

*Przypominamy, że co miesiąc przyznajemy nagrodę książkową dla autora najciekawiej opracowanego rozwiązania postawionych zagadnień.*

Dzisiaj proponuję zbadanie obiektu fizycznego, który wygląda niesłychanie prosto, a dopiero w doświadczeniu objawia całe bogactwo swoich właściwości. Ale do rzeczy. Będą nam potrzebne następujące

### Materiały i przyrządy

1. Pręt (lub rurka metalowa) cienki w stosunku do swojej długości.
2. Cienki sznurek lub nitka (w zależności od ciężaru pręta).
3. Młotek i dwa gwoździe oraz solidne podłoże, w które je wbijemy (np. zamocowana nieruchomo deska).
4. Nożyczki.
5. Stoper lub zegarek z sekundnikiem.

Zgromadziwszy je możemy przystąpić do następnego etapu przygotowań, którym jest **Konstrukcja obiektu fizycznego**

Będzie nim pręt zawieszony poziomo na nitkach jak na rysunku 1. Uwaga: jeden węzeł jest związany na poziomej nitce, która obejmuje pionową, a drugi odwrotnie. Pozwoli nam to zmieniać kształt zawieszenia regulując długość poziomego odcinka nitki (rys. 2). Gdyby węzły zbyt łatwo się rozluźniały, należy je wiązać podwójnie (zwłaszcza na poziomej nitce). Aby wyniki naszych doświadczeń były porównywalne, proponuję użyć pionowych odcinków nitki o długości dwukrotnie większej od długości pręta. Gwoździe wbijamy w odległości dokładnie równej długości pręta  $l$ . Wymiary otrzymanego obiektu podaje rysunek 3. Długość  $z$  z poziomej nitki możemy zmieniać w granicach od zera do  $l$ .

A teraz pora wyjaśnić, że przeprowadzimy

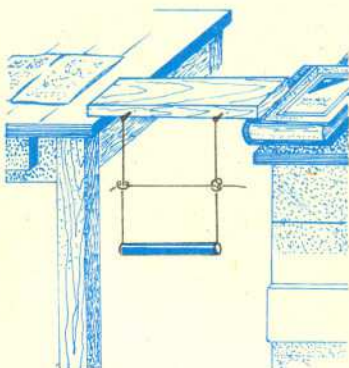
### Badanie drgań pręta

Przez drgania będziemy rozumieć zarówno wahania wzdłuż i w poprzek pręta, jak i drgania skrętne pręta wokół osi pionowej lub poziomej. Będziemy ograniczali się do drgań o **małej amplitudzie** (niewielkie wychylenia) i wykonamy  **pomiary częstości różnych rodzajów drgań w zależności od długości z poziomego odcinka nitki**. Szczególnie interesująca będzie sytuacja, kiedy jakieś dwa drgania będą miały częstości równe lub bardzo bliskie. Wtedy pobudzając drganie stanowiące kombinację obu tych drgań będziemy obserwować ciekawe efekty – należy je opisać i w miarę możliwości wytłumaczyć. Osoby szczególnie ambitne (i kompetentne) może zainteresować

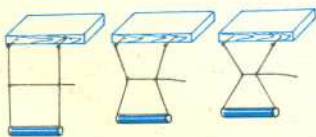
### Próba opisu teoretycznego

Jest to zadanie nietławe i nie należy się martwić, jeżeli się nie powiedzie. Niektóre z obserwowanych drgań mogą łatwiej dać się opisać niż inne. Oczywiście, otrzymawszy opis teoretyczny porównujemy przewidywaną przez ten opis zależność częstości drgań od  $z$  z wynikami doświadczalnymi. Powodzenia!

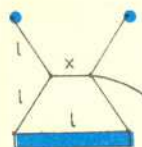
Redaguje doc. dr Jan GAJ



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Listy prosimy przysyłać pod adresem:  
Korespondencyjny Klub Fizyków  
Wydział Fizyki Uniwersytetu  
Warszawskiego  
ul. Hoża 69, 00-681 Warszawa.