Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**.
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 7/1990.

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 I 1991

Zadania z matematyki nr 211, 212

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

211. Na płaszczyźnie dane są dwie półproste o wspólnym początku P (nie zawarte w jednej prostej) oraz koło zawierające punkt P w swoim wnętrzu. Wyznaczyć konstrukcyjnie (cyrklem i linią) trójkąt o minimalnym obwodzie mający dwa boki zawarte w danych półprostych, a trzeci bok styczny do danego koła.

212. Znaleźć ogólną postać funkcji wymiernej F (jednej zmiennej rzeczywistej), nie równej tożsamościowo zeru, spełniającej równanie

$$F(x) = F\left(\frac{1}{x}\right)$$

dla wszystkich x, dla których obie strony mają sens liczbowy. (Należy podać warunki konieczne i dostateczne, jakie powinny spełniać wielomiany będące licznikiem i mianownikiem nieskracalnego ułamka P/Q przedstawiającego funkcję F.)

Zadanie **212** zaproponował pan Józef Banaś z Rzeszowa.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 6/1990

Przypominamy treść zadań:

203. Wyznaczyć najmniejszą liczbę naturalną n, dla której istnieje 1990 różnych liczb naturalnych $\le n$, takich, że żadna z nich nie jest dwukrotnością innej.
204. Wykazać zbieżność i znaleźć granicę ciągu $a_n = n^n(n!e - [n!e])^n$.

203. Niech n będzie dowolną liczbą naturalną i niech A będzie podzbiorem zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, takim, że

(1) $$x \in A \implies 2x \notin A.$$

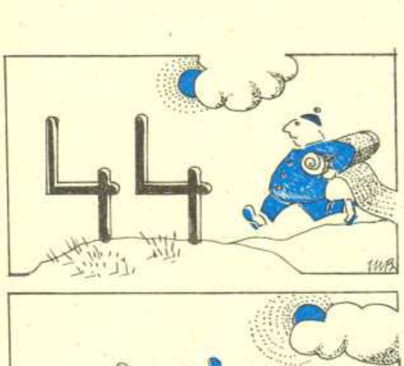
Dla dowolnej liczby nieparzystej q rozważmy ciąg

(2) $$q,\quad 2q,\quad 4q,\quad 8q, \ldots$$

Z każdej pary kolejnych wyrazów tego ciągu tylko jeden może należeć do A. Zatem w klasie zbiorów $A \subset \{1, \ldots, n\}$ o własności (1) maksymalną liczbę elementów ma zbiór A_{max}, który z każdego ciągu (2) wybiera dokładnie co drugi wyraz, od najmniejszego poczynając. Zbiór ten składa się z wszystkich liczb naturalnych $\le n$ postaci $4^k q$ (q nieparzyste). Dla ustalonych k i q jest w zbiorze $\{1, \ldots, n\}$ dokładnie $\left[(4^{-k}n+1)/2\right]$ liczb tej postaci. Liczba elementów zbioru A_{max} wynosi więc

$$F(n) = \sum_{k=0}^{m} \left[(4^{-k}n+1)/2\right], \quad \text{gdzie } 4^m \le n < 4^{m+1}.$$

Z bezpośredniego rachunku mamy: $F(2986) = 1989$, $F(2987) = 1990$. Wynika stąd, że najmniejszą liczbą n, dla której istnieje w zbiorze $\{1, \ldots, n\}$ podzbiór 1990-elementowy o własności (1), jest 2987.



204. Korzystamy z przedstawienia $e = s_n + r_n$, gdzie

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}, \quad r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}; \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Reszta r_n spełnia oszacowania:

(3) $$r_n > \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} = \frac{n+3}{(n+2)!}$$

oraz

(4) $$r_n < \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots\right) = \frac{1}{n \cdot n!}.$$

W wyrażeniu $n!e = n!s_n + n!r_n$ pierwszy składnik jest liczbą całkowitą, a drugi – liczbą z przedziału $(0;1)$. Wobec tego $n!e - [n!e] = n!r_n$, czyli

$$a_n = (n \cdot n!r_n)^n.$$

Z nierówności (4) wynika teraz, że $a_n < 1$, natomiast z (3) i z nierówności Bernoulliego dostajemy:

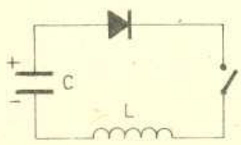
$$a_n > \left(\frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}\right)^n = \left(1 - \frac{2}{n^2+3n+2}\right)^n > 1 - \frac{2n}{n^2+3n+2}.$$

Zatem, na mocy twierdzenia o trzech ciągach, $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

Zadania z fizyki nr 109, 110

Redaguje dr Andrzej NADOLNY

109. Dany jest obwód, jak na rysunku 1, złożony z idealnych elementów: diody, kondensatora o pojemności C, cewki o indukcyjności L oraz wyłącznika. W chwili początkowej między okładkami kondensatora panuje napięcie U_0 (górna okładka naładowana dodatnio). Znaleźć napięcie na kondensatorze oraz natężenie prądu płynącego w obwodzie po upływie czasu t od zamknięcia wyłącznika.



Rys. 1

110. Kula A o promieniu r spada na unieruchomioną kulę B o promieniu R i wielokrotnie się od niej odbija. W chwili początkowej środek kuli A znajduje się na wysokości $h \gg R + r$ nad środkiem kuli B i w odległości $\varepsilon \ll R + r$ od prostej pionowej przechodzącej przez środek tej kuli. Znaleźć (metodą analityczną lub numeryczną) przybliżony wzór opisujący współrzędną poziomą środka kuli A w chwili k-tego odbicia w zależności od liczby k i współrzędnej początkowej ε. Odbicia należy traktować jako idealnie sprężyste, opór powietrza i obrót kuli A zaniedbać.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 93 (WT=2,41), 94 (WT=2,80), 95 (WT=2,93) i 96 (WT=2,35) z numerów 9/1989 i 10/1989

Aleksander Surma	– Myszków	45,06pkt
Andrzej Borowski	– Aleksandrów Kujawski	39,92pkt
Adam Sikorski	– Lublin	36,64pkt
Wojciech Peisert	– Wrocław	35,32pkt
Piotr Bała	– Toruń	35,27pkt
Przemysław Gworys	– Częstochowa	33,59pkt
Mariusz Bogacz	– Pińczów	31,91pkt
Marek Karaś	– Tarnów	29,30pkt
Leszek Motyka	– Kraków	26,63pkt

Pan Surma po raz drugi przekroczył 44 punkty.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 6/1990

Przypominamy treść zadań:

101. Izolowana kula metalowa o promieniu 1 cm jest bombardowana przez szeroki strumień elektronów o energii 1000 eV. Po pewnym czasie zostaje osiągnięty stan równowagi. Jakie są w tym stanie: potencjał kuli, zgromadzony na niej ładunek oraz natężenie pola elektrycznego przy powierzchni kuli?

102. Jednorodna, wiotka lina o długości l i masie m, z zawieszonym na jej dolnym końcu obciążnikiem o masie $M = 5m$, zwisa swobodnie, zaczepiona swym górnym końcem. Wiejący poziomo ze stałą prędkością wiatr działa na linę siłą równą co do wartości ciężarowi liny, podczas gdy siła wiatru działająca na obciążnik jest zaniedbywalna w porównaniu z jego ciężarem. Jaki kąt tworzy lina z kierunkiem pionowym w punkcie jej zaczepienia? Obliczyć w sposób przybliżony metodami numerycznymi odchylenie obciążnika od pionu.

101. W stanie równowagi (nasycenia) ładunek kuli jest stały i nowe elektrony nie docierają do niej dzięki odpychaniu elektrostatycznemu. Potencjał kuli V musi zatem być równy energii elektronu dzielonej przez jego ładunek, czyli $V = 1000$ V.
Ładunek zgromadzony na kuli wynosi $Q = CV$, gdzie $C = 4\pi\epsilon_0 R$ jest pojemnością kuli o promieniu R (ϵ_0 – przenikalność elektryczna próżni), czyli $Q = 4\pi\epsilon_0 RV$. Natężenie pola przy powierzchni kuli, określone wzorem

$$E = Q/(4\pi\epsilon_0 R^2)\,,$$

wynosi zatem $E = V/R$.

102. Kierunek liny w punkcie zaczepienia Z pokrywa się z kierunkiem wypadkowej siły F działania liny na zaczep (rys. 2). Składowa pionowa tej siły $F_y = -(m+M)g = -6mg$ (g – przyspieszenie ziemskie), składowa pozioma (siła działania wiatru równa ciężarowi liny) $F_x = -mg$. Kąt Θ między kierunkiem siły wypadkowej a pionem wynosi więc $\Theta = \operatorname{arctg}(F_x/F_y) = \operatorname{arctg}(1/6) = 9,5°$.
Aby obliczyć odchylenie dolnego końca liny od linii pionowej przechodzącej przez punkt zaczepienia, podzielimy linę na n odcinków o jednakowej długości $\Delta l = l/n$. Traktując te odcinki jako prostoliniowe przyjmujemy, że kierunek każdego odcinka pokrywa się z kierunkiem siły działającej w połowie jego długości ze strony dolnej części liny.
Niech i będzie numerem kolejnego odcinka licząc od dolnego końca liny (umieszczonego w początku układu współrzędnych). Środek tego odcinka oznaczamy przez P_i, omawianą wyżej siłę – przez $\vec{F}_i$. Składowa pozioma siły $\vec{F}_i$ jest równa całkowitej sile wiatru działającej na linę poniżej punktu P_i:

$$F_{i,x} = F_x(i - 1/2)/n = -(i - 1/2)mg/n$$

(wobec niewielkiego odchylenia liny od pionu można przyjąć, że siła wiatru działająca na odcinek liny jest proporcjonalna do długości tego odcinka).
Składowa pionowa równa jest sumie ciężaru dolnego odcinka liny i obciążnika:

$$F_{i,y} = -Mg - (i - 1/2)mg/n = -(5mg + (i - 1/2)mg/n)\,.$$

Kąt α_i nachylenia odcinka względem pionu spełnia równanie

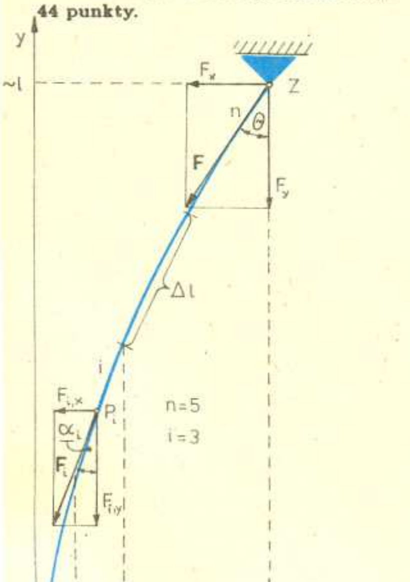
$$\operatorname{tg}\alpha_i = F_{i,x}/F_{i,y} = (i - 1/2)/(5n + i - 1/2)\,.$$

Rzut poziomy tego odcinka wynosi $\Delta x_i = \Delta l \sin\alpha_i$. Wobec tego, że $\alpha_i < \Theta < 10°$, przyjmujemy $\Delta x_i = \Delta l \operatorname{tg}\alpha_i$. Stąd

$$\Delta x_i = (l/n)(i - 1/2)/(5n + i - 1/2)\,.$$

Poszukiwane odchylenie od pionu obliczamy jako

$$x_s = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i\,.$$



Rys. 2

n	5	20	50	500
$x_s(10^{-2}l)$	8,849	8,840	8,839	8,839

Wyniki otrzymane dla różnych wartości n podane są w tabeli obok.
Dla uzyskania poprawnego wyniku wystarczy więc bardzo niewielkie n. Tym bardziej, że ze względu na przyjęte założenia upraszczające nie ma sensu podawanie końcowego wyniku z dokładnością większą od dwóch miejsc znaczących. Odpowiedź brzmi więc: $x_s = 0,088\,l$. Dokładniejsze sposoby rozwiązywania problemu dają również taki wynik.