Rafał KAPELKO, laureat srebrnego medalu KUPzM w 1989 roku

W *Delcie* 2/1989 była przedstawiona propozycja rozwinięcia tytułowego tematu przy przyjęciu, że

pochodną ciągu (a_n) *jest ciąg* $\left(a_n^{(1)}\right) := a_{n+1} - a_n$.

Natychmiastową konsekwencją takiej definicji jest rekurencyjny wzór na k-tą pochodną ciągu

$$\left(a_n^{(k+1)}\right) = \left(a_n^{(k)}\right)^{(1)}.$$

Spośród licznych przykładów umieszczonych w mojej pracy szczególnie interesujący jest ciąg geometryczny o ilorazie 2. Mamy bowiem $\left(a \cdot 2^{n-1}\right)^{(1)} = a \cdot 2^n - a \cdot 2^{n-1} = a \cdot 2^{n-1}$. Oznacza to, że jeśli b_n jest ciągiem geometrycznym o ilorazie 2, to $b_n^{(1)} = b_n$, a więc ciąg ten zachowuje się analogicznie do funkcji e^x.

Można sprawdzić, że wzory na pochodną sumy i różnicy ciągów oraz iloczynu ciągu przez stałą są takie same, jak dla funkcji zmiennej rzeczywistej. Pozwala to na podanie bezpośredniego wzoru na k-tą pochodną ciągu

$$\text{(1)} \qquad a_n^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a_{n+k-i} \cdot (-1)^i,$$

co sprawdza się indukcyjnie.

Natomiast inne są już wzory na pochodną iloczynu i ilorazu ciągów

$$(a_n \cdot b_n)^{(1)} = a_n^{(1)} \cdot b_n + a_n \cdot b_n^{(1)} + a_n^{(1)} \cdot b_n^{(1)},$$

$$\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^{(1)} = \frac{a_n^{(1)} \cdot b_n - a_n \cdot b_n^{(1)}}{b_n^2 + b_n \cdot b_n^{(1)}}.$$

Sprawdzenie np. pierwszego z nich jest następujące

$$\begin{aligned}(a_n \cdot b_n)^{(1)} &= a_{n+1} \cdot b_{n+1} - a_n \cdot b_n = \\ &= a_{n+1} \cdot b_{n+1} - a_{n+1} \cdot b_n + a_{n+1} \cdot b_n - a_n \cdot b_n = \\ &= a_{n+1} \cdot b_n^{(1)} + a_n^{(1)} \cdot b_n = \left(a_n^{(1)} + a_n\right) \cdot b_n^{(1)} + a_n^{(1)} \cdot b_n = \\ &= a_n^{(1)} \cdot b_n^{(1)} + a_n \cdot b_n^{(1)} + a_n^{(1)} \cdot b_n .\end{aligned}$$

Konsekwencją przyjęcia podanej wyżej definicji pochodnej ciągu jest przyjęcie definicji:

ciągiem pierwotnym ciągu (a_n) *nazywamy taki ciąg* $\left(\int a_n\right)$, *że* $\left(\int a_n\right)^{(1)} = a_n$,

co daje, po prostej indukcji,

$$\text{(2)} \qquad \int a_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i + C .$$

Okazuje się więc, że każdy ciąg można łatwo całkować.

Ponieważ inny jest wzór na pochodną iloczynu, więc inny jest też wzór na całkowanie przez części

$$\text{(3)} \qquad a_n \cdot b_n = \int a_n^{(1)} \cdot b_n + \int a_n \cdot b_n^{(1)} + \int a_n^{(1)} \cdot b_n^{(1)}.$$

Jako przykład zastosowania tego wzoru obliczę $S_n^k = \sum\limits_{i=1}^{n} i^k$.

Podstawiając we wzorze (3) $a_n = (n+1)^{k+1}$ i $b_n = 1$ otrzymujemy

$$(n+1)^{k+1} = \int \sum_{i=0}^{k} \binom{k+1}{i+1} (n+1)^{k-i},$$

gdzie pochodna ciągu a_n została obliczona przez zróżniczkowanie rozwinięcia wyrazu a_{n+1} w dwumian Newtona. Mamy więc, wobec wzoru (2),

$$\text{(4)} \qquad \begin{aligned}&(n+1)^{k+1} = \\ &= \binom{k+1}{1} S_n^k + \binom{k+1}{2} S_n^{k-1} + \ldots + \binom{k+1}{k+1} S_n^0 + C,\end{aligned}$$

co pozwala obliczyć S_n^k rekurencyjnie za pomocą $S_n^{k-1}, \ldots, S_n^0$, gdyż podstawiając $n = 1$ i $k = 0$ stwierdzamy, że $C = 1$.

Dalsze uproszczenie obliczania S_n^k można uzyskać, jeśli się zauważy, że

$$\text{(5)} \qquad (k+1) \cdot S_n^k = n^{k+1} + A_1 \cdot n^k + \ldots + A_k \cdot n,$$

gdzie współczynniki $A_1, \ldots, A_k$ nie zależą od n, zależą tylko od k. Wzór (5) uzyskuje się ze wzoru (4) indukcyjnie.

Zgodnie ze wzorem (5) mamy

$$(k+1) \cdot S_{n+1}^k = (n+1)^{k+1} + A_1(n+1)^k + \ldots + A_k(n+1),$$

co po odjęciu (5) daje

$$\text{(6)} \qquad \begin{aligned}&(k+1)(n+1)^k = \left((n+1)^{k+1} - n^{k+1}\right) + \\ &+ A_1\left((n+1)^k - n^k\right) + \ldots + A_k\left((n+1) - n\right).\end{aligned}$$

Z drugiej strony, zgodnie z dwumianem Newtona, mamy

$$(n+1)^m = n^m + \binom{m}{1} n^{m-1} + \ldots + \binom{m}{m-1} n + 1 .$$

Pozwala to obliczyć współczynniki występujące we wzorze (6). Mamy wtedy, dla każdego $i = 1, 2, \ldots, k$

$$\begin{aligned}&(k+1)\binom{k}{i} = \\ &= \binom{k+1}{i+1} + A_1 \cdot \binom{k}{i} + A_2 \cdot \binom{k-1}{i-1} + \ldots + A_i \binom{k-i+1}{1}.\end{aligned}$$

Przenosząc wyrazy nie zawierające współczynników A_m na lewą stronę i dzieląc przez $\binom{k+1}{i+1}$ otrzymujemy dla dowolnego k

$$\text{(7)} \qquad i = \binom{i+1}{1} B_1 + \binom{i+1}{2} B_2 + \ldots + \binom{i+1}{i} B_i,$$

gdzie $B_i = A_i / \binom{k+1}{i}$. Jeśli ten rezultat połączymy ze wzorem (5), otrzymamy

$$\begin{aligned}(k+1)\sum_{i=1}^{n} i^k &= n^{k+1} + \binom{k+1}{1} B_1 n^k + \\ &+ \binom{k+1}{2} B_2 n^{k-1} + \ldots + \binom{k+1}{k} B_k n,\end{aligned}$$

gdzie współczynniki B_m dane są rekurencyjnie wzorem (7).

Przytoczony wzór na całkowanie ciągów przez części pozwala np. na obliczenie sum

$$1! \cdot 1 + 2! \cdot 2 + \ldots + n! \cdot n,$$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n+1),$$

albo takich sum funkcji trygonometrycznych, jak

$$\cos 0 + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos n\alpha,$$

$$\sin 0 + \sin\alpha + \sin 2\alpha + \ldots + \sin n\alpha,$$

ale szczegółów ani wyników nie podaję, by nie psuć przyjemności Czytelnikom.