Charakterystyka Eulera jest niezmiennikiem topologicznym

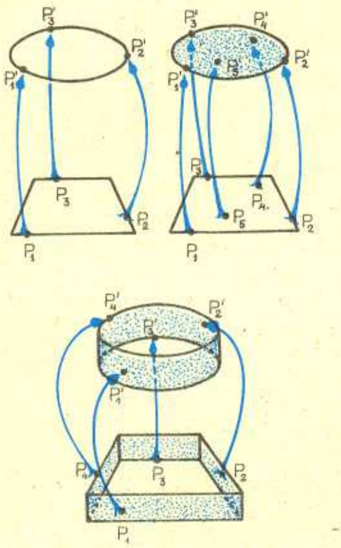
mgr Danuta CIESIELSKA i mgr Sławomir CYNK

Większość Czytelników spotkała się już zapewne z następującą definicją:

Homeomorfizm (z gr.): homeo – jednakowy, podobny; morphe – kształt.

Figury geometryczne A i B nazywamy *homeomorficznymi*, jeżeli istnieje odwzorowanie $f : A \to B$, takie, że
(i) f jest ciągłe,
(ii) f jest wzajemnie jednoznaczne,
(iii) odwzorowanie odwrotne do f jest ciągłe.

Odwzorowanie f mające własności (i) – (iii) nazywamy *homeomorfizmem*.

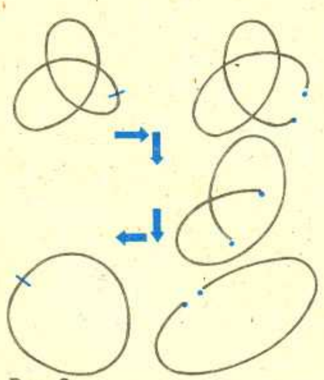


Rys. 1

Najprostsze przykłady figur homeomorficznych to takie figury geometryczne, z których jedną można przekształcić na drugą za pomocą wyginania i rozciągania, ale bez rozrywania i sklejania. Na rysunku 1 przedstawiamy trzy przykłady tego rodzaju: brzeg kwadratu i okrąg, kwadrat i koło oraz pobocznicę walca i powierzchnię boczną sześcianu.

W podobny sposób można wykazać, że powierzchnia sześcianu jest homeomorficzna ze sferą; wystarczy w tym celu wykonać sześcian z elastycznego materiału, a następnie napompować (podobnie jak piłkę).

Nie wszystkie przykłady są jednak tak proste. Można udowodnić, że okrąg jest homeomorficzny z węzłem zwanym koniczynką (rys. 2). Tymczasem aby przekształcić węzeł na okrąg (czyli rozwiązać węzeł), należy najpierw go rozciąć, następnie rozplątać i na końcu skleić z powrotem.



Rys. 2

Oczywiście, aby wykazać, że dwie figury są homeomorficzne, wystarczy wskazać przykład homeomorfizmu między nimi (tak jak to przed chwilą robiliśmy). Znacznie trudniej jest dowieść, że dwie figury homeomorficznymi nie są. Jednym ze sposobów postępowania w tej sytuacji jest znalezienie jakiejś cechy, która jest jednakowa dla dowolnych dwóch figur homeomorficznych, ale różna dla figur przez nas badanych. Własność jednakową dla dowolnych dwóch figur homeomorficznych nazywamy *niezmiennikiem topologicznym*.

Prześledźmy opisany wyżej sposób postępowania na kilku przykładach; poznamy przy okazji kilka prostych niezmienników topologicznych.

Punkt i prosta. Ponieważ każdy homeomorfizm jest bijekcją, więc dowolne dwie figury homeomorficzne mają tyle samo elementów (liczba elementów figury geometrycznej jest niezmiennikiem topologicznym). Ale zbiór złożony z jednego punktu ma jeden element, a prosta ma ich nieskończenie wiele – figury te nie są więc homeomorficzne.

Prosta i dwie proste równoległe. Prosta jest figurą geometryczną złożoną z jednego „kawałka", natomiast dwie proste równoległe to figura złożona z dwóch „kawałków". „Kawałki", z których zbudowana jest figura geometryczna, noszą nazwę składowych spójnych; figury mające tylko jedną składową spójną (składające się z jednego „kawałka") – nazwę figur spójnych. Można wykazać, że homeomorfizm przekształca składowe spójne na składowe spójne, a zatem figury homeomorficzne mają tyle samo składowych spójnych (liczba składowych spójnych jest niezmiennikiem topologicznym). Ale, jak zauważyliśmy przed chwilą, prosta jest figurą spójną, a druga badana figura ma dwie składowe. Oznacza to, że figury te nie są homeomorficzne.

O charakterystyce Eulera pisaliśmy już w *Delcie* 10/1989.

Charakterystykę Eulera można również definiować dla figur znacznie bardziej skomplikowanych niż wielościany topologiczne. Definicja taka wymaga jednak użycia skomplikowanych metod topologicznych i traci geometryczny charakter.

Obydwa poznane do tej pory niezmienniki są wprawdzie bardzo proste, ale ich skuteczność jest niewielka; żaden z nich nie pomoże nam np. w wykazaniu, że odcinek nie jest homeomorficzny z brzegiem kwadratu. Aby więc wykazać, że te dwie figury rzeczywiście nie są homeomorficzne, musimy użyć nowego niezmiennika topologicznego. Okazuje się, że doskonale do tego celu nadaje się charakterystyka Eulera. Charakterystykę Eulera definiujemy dla dowolnej figury geometrycznej będącej sumą mnogościową skończonej liczby punktów, odcinków oraz wielokątów wypukłych (figury, mające opisaną własność, będziemy nazywać wielościanami). Charakterystyką Eulera wielościanu P nazywamy liczbę całkowitą $\chi(P) = W - K + S$, gdzie W oznacza liczbę wierzchołków, K – krawędzi, a S ścian wielościanu P.

Dla lepszej ilustracji obliczmy charakterystykę Eulera kilku wielościanów (rys. 3).

Dla nas najważniejsze jest to, że charakterystyka Eulera jest niezmiennikiem topologicznym, czyli że zachodzi twierdzenie:

Twierdzenie 1. Jeżeli wielościany P i Q są homeomorficzne, to $\chi(P) = \chi(Q)$.

Korzystając z tego twierdzenia możemy łatwo dowieść, że odcinek nie jest homeomorficzny z brzegiem kwadratu. Wystarczy w tym celu przypomnieć sobie, że charakterystyka Eulera odcinka jest równa 1, a brzegu kwadratu – 0 (rys. 3). W podobny sposób możemy wykazać, że kwadrat nie jest homeomorficzny z brzegiem sześcianu.

Co prawda, charakterystykę Eulera zdefiniowaliśmy jedynie dla „wielościanów", czyli dla bardzo wąskiej klasy figur geometrycznych, jednak dzięki twierdzeniu 1 można jej używać przy badaniu znacznie bardziej skomplikowanych figur. Będziemy przy tym wykorzystywać następującą własność relacji „bycia figurami homeomorficznymi" (zwaną przechodniością):
Jeżeli figura A jest homeomorficzna z figurą B, a B jest homeomorficzna z figurą C, to również A jest homeomorficzna z C.

Niech teraz W będzie dowolną figurą homeomorficzną z pewnym wielościanem (figury o tej własności nazywać będziemy *wielościanami topologicznymi*). Dowolne dwa wielościany P_1 i P_2 homeomorficzne z W są (na mocy własności przechodniości) homeomorficzne między sobą, a zatem mają równe charakterystyki Eulera (twierdzenie 1). Możemy więc przyjąć następującą definicję:

Charakterystyką Eulera wielościanu topologicznego nazywamy charakterystykę Eulera dowolnego wielościanu z nim homeomorficznego.

Dla lepszej ilustracji obliczmy charakterystykę Eulera kilku prostych wielościanów topologicznych:
Okrąg. Jak już zauważyliśmy, okrąg jest homeomorficzny z brzegiem kwadratu, więc jego charakterystyka Eulera jest równa 0.
Koło. Jest homeomorficzne z kwadratem, zatem jego charakterystyka Eulera jest równa 1.
Sfera. Jest homeomorficzna z brzegiem sześcianu, zatem $\chi = 2$.
Pobocznica walca. Podobnie jak dla powierzchni bocznej sześcianu: $\chi = 0$.
Wstęga Möbiusa. Z rysunku 4 wynika, że $\chi = 0$.

W podobny sposób można obliczać charakterystykę Eulera coraz bardziej skomplikowanych wielościanów topologicznych. Dla nas najważniejsze jest to, że z własności przechodniości relacji „bycia figurami homeomorficznymi" oraz z twierdzenia 1 wynika, że również taka „uogólniona" charakterystyka Eulera jest niezmiennikiem topologicznym, czyli że zachodzi następujące twierdzenie:

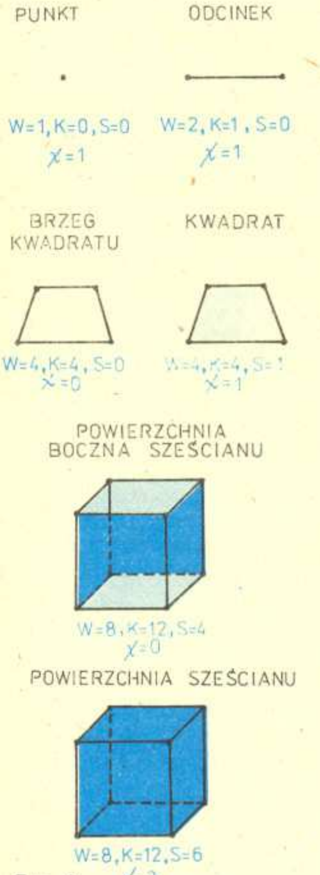
Twierdzenie 2. Jeżeli wielościany topologiczne P i Q są homeomorficzne, to $\chi(P) = \chi(Q)$.

Korzystając z tego twierdzenia i wcześniejszych obliczeń możemy stwierdzić, że okrąg nie jest homeomorficzny z odcinkiem oraz że sfera nie jest homeomorficzna z kołem.

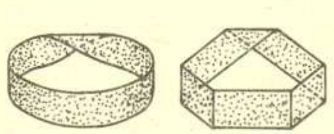
Warto jednak w tym miejscu zwrócić uwagę na to, że dwie figury geometryczne mogą mieć równe charakterystyki Eulera, a mimo to nie być homeomorficzne. Na przykład zarówno wstęga Möbiusa, jak i pobocznica walca mają charakterystykę Eulera równą 0, a mimo to nie są homeomorficzne. Dowód tego faktu nie jest prosty i wymaga użycia kolejnego niezmiennika topologicznego, zwanego jednostronnością powierzchni. Pobocznica walca ma dwie strony, gdyż można ją pomalować dwoma różnymi kolorami, jak na rysunku 5, a wstęga Möbiusa tej własności nie ma (jest powierzchnią jednostronną).

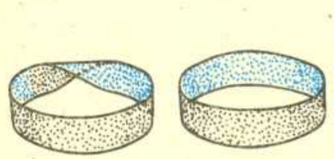
Niestety, często się zdarza, że badając coraz bardziej skomplikowane figury musimy używać coraz subtelniejszych niezmienników. Ciekawych niezmienników topologicznych dostarcza jeden z działów matematyki – topologia algebraiczna.

Dlaczego więc zajmujemy się charakterystyką Eulera, zamiast poszukać jakiegoś lepszego niezmiennika topologicznego? Powody są dwa. Po pierwsze – jest ona wyjątkowo prostym niezmiennikiem topologicznym. A po drugie – mimo ujawnionej wady jest stosunkowo skuteczna – w szczególności umożliwia pełną klasyfikację dwustronnych powierzchni bez brzegu.



Rys. 3


Rys. 4 W=10, K=15, S=5 $\chi = 0$


Rys. 5

O innych niezmiennikach można przeczytać w artykule K. Ciesielskiego i Z. Pogody „Topologia algebraiczna – niezwykłe połączenie dziedzin" (*Problemy* 12/1988).