Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 193 (WT=1,40), 194 (WT=4,00), 195 (WT=2,80), 196 (WT=2,14) z numerów 8 i 9/1989

Kazimierz Serbin	– Sanok	43,36pkt
Adam Czornik	– Bytom	42,49pkt
Jerzy Janowicz	– Bolesławiec	41,95pkt
Krzysztof Zawisławski	– Warszawa	41,45pkt
Dariusz Rybacki	– Kraśnik	40,18pkt

Dziękujemy nielicznym uczestnikom, którzy – nie zrażeni potężnym zaburzeniem regularności „cyklu zadaniowego" (i *Delty* w ogóle), spowodowanym przecież przez niekontrolowane żywioły – zdecydowali się przysłać rozwiązania zadań z „sierpniowego" i „wrześniowego" numeru.

I my – nie zrażeni nienormalnością sytuacji, nie wiedząc, jakie niespodzianki przyszłość gotuje – zdecydowani jesteśmy kontynuować zabawę tak długo, jak się da.

Zadania z matematyki nr 209, 210

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

209. Czy istnieje w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej zbiór domknięty, którego część wspólna z dowolną płaszczyzną jest zbiorem skończonym, niepustym?

210. Niech $m, n \geq 1$ będą liczbami naturalnymi. Oznaczmy ich największy wspólny dzielnik przez d.
(a) Udowodnić, że jeśli iloraz m/d jest liczbą nieparzystą, to liczby $u = 2^m - 1$ i $v = 2^n + 1$ są względnie pierwsze.
(b) Obliczyć największy wspólny dzielnik liczb u i v, gdy m/d jest liczbą parzystą.

Zadanie **210** zaproponował pan Jan Ciach z Ostrowca Świętokrzyskiego, jako naturalną kontynuację zadania **190** (*Delta* 4/1989).

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 5/1990

Przypominamy treść zadań:

201. Znaleźć maksimum objętości czworościanów mających pięć krawędzi długości nie większej niż 1.

202. Dowieść, że $\sum(x_k/x_{k+1}) \leq \sum(x_k/x_{k+1})^2$ dla dowolnych $x_1, \ldots, x_n > 0$ (sumowanie po k od 1 do n; $x_{n+1} := x_1$).

201. Niech CD będzie tą krawędzią czworościanu $ABCD$ (z rozważanej klasy), na której długość nie nakłada się ograniczeń. Przy ustalonym położeniu wierzchołków A, B, C objętość V_{ABCD} będzie maksymalna, gdy wierzchołek D będzie leżał możliwie najdalej od płaszczyzny ABC – czyli gdy ABD będzie trójkątem równoramiennym, $|AD| = |BD| = 1$, leżącym w płaszczyźnie prostopadłej do ABC. A wówczas

$$3V_{ABCD} = S_{ABC} \cdot \sqrt{1-(x/2)^2}\,.$$

Przy ustalonej długości $|AB| = x \in (0;1\rangle$, maksymalna wartość pola S_{ABC} (osiągana dla trójkąta równoramiennego, $|AC| = |BC| = 1$) wynosi $(x/2)\sqrt{1-(x/2)^2}$. Zatem (przy ustalonym x)

$$V_{ABCD} \leq (x/6)\left(1-(x/2)^2\right) =: V(x)$$

(równość dla $|AC| = |BC| = |AD| = |BD| = 1$, pł. $ABC \perp$ pł. ABD).

Gdy x przebiega przedział $(0;1\rangle$, funkcja $x \mapsto V(x)$ rośnie. Tak więc szukane maksimum (osiągane, gdy także krawędź AB ma długość 1) wynosi $V(1) = \frac{1}{8}$.

202. Oznaczając $x_k/x_{k+1} = a_k$ mamy $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$, skąd $a_1 + \ldots + a_n \geq n$ (średnia arytmetyczna i geometryczna). Zatem na mocy nierówności Cauchy'ego–Schwarza

$$\left(\sum a_k\right)^2 = \left(\sum 1 \cdot a_k\right)^2 \leq \left(\sum 1\right)\left(\sum a_k^2\right) = \\ = n\sum a_k^2 \leq \left(\sum a_k\right)\left(\sum a_k^2\right).$$

i wobec tego

$$\sum a_k \leq \sum a_k^2\,.$$

Zadania

Redaguje mgr Michał WOJCIECHOWSKI

M 574. Dla jakich liczb naturalnych n wyrażenie $\underbrace{\ln\ln\ldots\ln}_{n} n$ jest określone?
Rozwiązanie na str. 5

M 575. Dane są okręgi O_1 i O_2 oraz punkt p. Skonstruować trójkąt równoboczny, którego jednym wierzchołkiem jest punkt p, drugi należy do okręgu O_1, a trzeci do O_2.
Rozwiązanie na str. 12

M 576. Danych jest dziesięć liczb całkowitych $a_1, \ldots, a_{10}$. Udowodnić, że istnieją liczby $\varepsilon_i \in \{-1, 0, 1\}$, $i = 1, \ldots, 10$ nie wszystkie równe zero, takie, że liczba $\sum_{i=1}^{10} \varepsilon_i a_i$ jest podzielna przez 1023.
Rozwiązanie na str. 13

Redaguje dr Krzysztof CHARCHUŁA

F 290. Dwa identyczne elektromagnetyczne impulsy prostokątne o amplitudzie pola elektrycznego V biegną naprzeciw siebie po idealnej linii transmisyjnej. Energia każdego impulsu wynosi $E \sim V^2$. Gdy impulsy spotkają się, powstanie pojedynczy impuls o amplitudzie $2V$. Czy to, że amplituda impulsu podwoiła się, oznacza, iż energia wzrosła do $4E$?
Rozwiązanie na str. 17

F 291. Spotkało się dwóch żeglarzy i każdy z nich utrzymuje, że jego łódź jest szybsza. Aby rozwiązać spór, postanowili urządzić regaty na pobliskiej rzece na dystansie od mostu do mostu, zgodnie z jej biegiem. W umówionym dniu nie wiał nawet najmniejszy wiatr. Pomimo to żeglarze postanowili ścigać się i obydwie łodzie zaczęły dryfować unoszone prądem rzeki. W pewnym momencie jeden z żeglarzy postawił żagle, a drugi nie zdecydował się na to do końca regat. Czy wyścig miał zwycięzcę? Jeśli tak, to który z żeglarzy wygrał?
Rozwiązanie na str. 17