

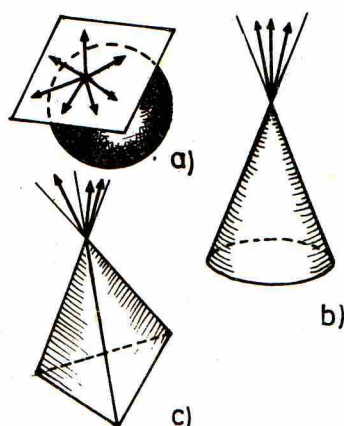
# Układ stabilizujący figury

Doc. dr Stanisław FUDALI

Pytanie, o którym jest mowa w tym artykule, da się sformułować w postaci problemu doświadczalnego: iloma szpilkami wbitymi w płaszczyznę można unieruchomić leżącą na niej płaską figurę i gdzie należy je wbijać – zakładamy przy tym, że przez figurę szpilek wbijać nie można (np. dlatego, że jest wykonana ze stalowej blachy). Pewne spostrzeżenia nasuwają się od razu – szpilki trzeba wbijać tuż przy brzegu figury. Dla podania pełnej i pewnej odpowiedzi na to pytanie należy je matematycznie sprecyzować.

Figura wypukła to taka figura, która wraz z dwoma punktami zawiera cały łączący je odcinek.

Można rozważać podobne sytuacje w przestrzeni.



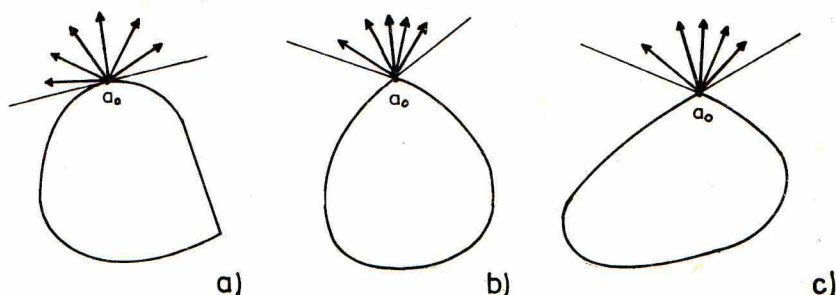
Rys. 2. Tutaj stożek nieprzesuwalności jest rzeczywiście stożkiem – stąd wywodzi się właśnie nazwa tego obszaru; gdy punkt  $a_0$  jest punktem regularnym brzegu figury  $Q$ , to stożek nieprzesuwalności w tym punkcie jest półprzestrzenią (rys. 2a).

Punkt regularny to taki punkt, w którym figura ma określoną styczną – na płaszczyźnie prosta, a w przestrzeni płaszczyznę.

Na płaszczyźnie rozpatrywać będziemy figury wypukłe (i tylko dla nich rozwiążemy postawiony problem). Umówimy się też, że wolno nam je tylko przesuwac równolegle w dowolnym kierunku (a nie wolno np. obracać). Przesunięcie równoległe będziemy tu rozumieć „w sposób mechaniczny”, tzn. brać pod uwagę będziemy nie tylko położenie początkowe i końcowe (jak to się na ogół czyni w geometrii), lecz także wszystkie położenia pośrednie między tymi dwoma.

Wbijanie szpilki to wybór jakiegoś punktu płaszczyzny, przez który figurze nie wolno się przesuwac (użyty wyżej zwrot „tuż przy brzegu” matematyzuje się w ten sposób, że rozpatrujemy figury bez brzegu, a szpilki wbijamy w któryś z punktów brzegu).

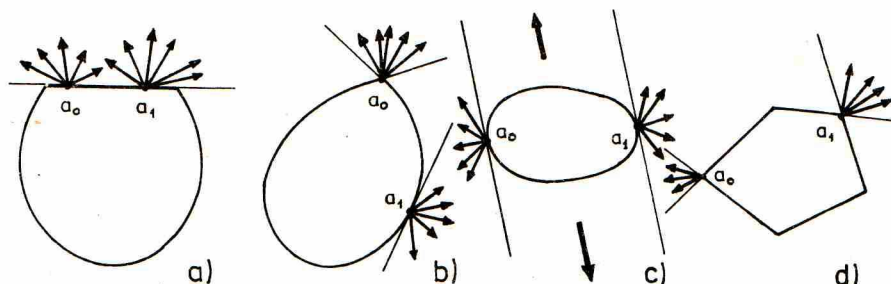
Weźmy zatem jakąś figurę wypukłą, oznaczmy ją  $Q$ , i wbijmy szpilkę tuż przy jej brzegu w punkt  $a_0$ . Szpilka ta uniemożliwi przesuwanie figury  $Q$  w pewnych kierunkach. Kierunki, w których wbita szpilka nie pozwala przesuwac figury  $Q$ , wypełniają pewien obszar. Będziemy go nazywać **stożkiem nieprzesuwalności** figury  $Q$  w punkcie  $a_0$ .



Rys. 1

Jest to suma tych półprostych wychodzących z punktu  $a_0$ , których przedłużenia do prostej przechodzą przez punkty wewnętrzne figury  $Q$  (nie trudno zauważyć, że stożek nieprzesuwalności jest zbiorem, do którego należy dokładnie jeden punkt brzegowy, mianowicie  $a_0$ , będący równocześnie punktem brzegowym figury  $Q$ ). Od razu spostrzegamy, że stożek nieprzesuwalności figury  $Q$  w punkcie  $a_0$  jest wnętrzem kąta wypukłego wraz z wierzchołkiem i staje się półpłaszczyzną, gdy punkt  $a_0$  jest regularny (rys. 1a).

Wbijmy teraz drugą szpilkę w punkcie  $a_1$  ( $a_0 \neq a_1$ ), także tuż przy brzegu figury  $Q$ .

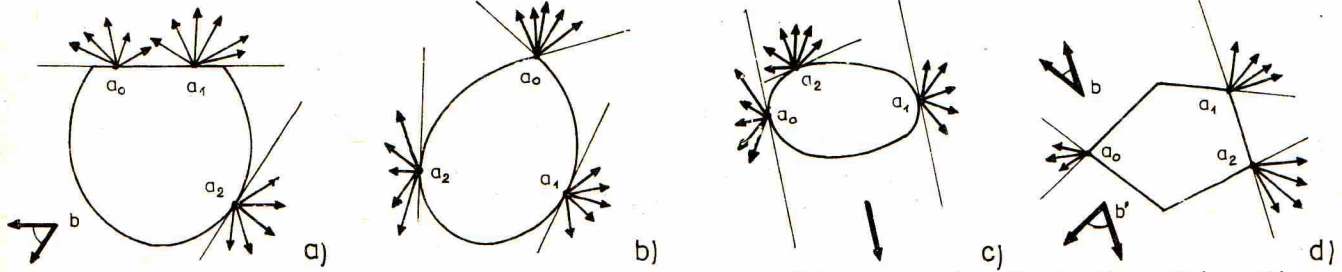


Rys. 3

Stożki nieprzesuwalności w punktach  $a_0$  i  $a_1$  mogą się pokrywać (rys. 3a), ale niekoniecznie; mogą być różne i mieć tylko niepustą część wspólną (rys. 3b) albo nawet pustą (rys. 3c,d). Zrozumiałe jest, że za pomocą dwóch szpilek możemy bardziej, niż za pomocą jednej, ograniczyć możliwość przesuwania figury  $Q$ , a nawet **bardzo** ograniczyć tę możliwość, co widać na rysunku 3c, gdzie możliwe jest przesuwanie figury  $Q$  tylko w jednym kierunku (na rysunku zaznaczonym grubą strzałką).

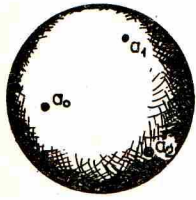


Wbijając trzecią szpilkę w punkt  $a_2$ , różny od  $a_0$  i  $a_1$ , i też tuż przy brzegu figury  $Q$ , otrzymamy trzeci stożek nieprzesuwalności figury  $Q$ .



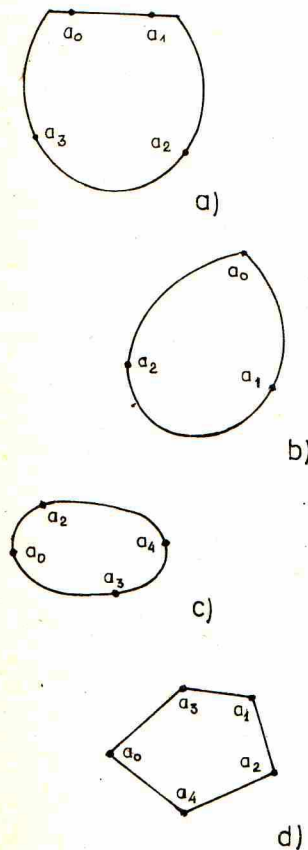
Rys. 4

Może się zdarzyć, że wbite trzy szpilki unieruchomią całkowicie figurę  $Q$  (rys. 4b), tzn. uniemożliwią przesuwanie jej w **każdym** kierunku, ale niekoniecznie stać się tak musi; na rysunkach 4a i 4d widać, że  $Q$  można przesuwac w każdym kierunku między kierunkami strzałek zaczepionych w punkcie  $b$ ; na rysunku 4c taki kierunek jest tylko jeden. W przypadku sytuacji takiej, jak na rysunku 4b, powiadamy, że  $Q$  została **ustabilizowana** trzema punktami  $a_0, a_1, a_2$  (a nie trzema szpilekami), a zbiór tych punktów nazywamy **układem stabilizującym** figury  $Q$ .



Rys. 5. W przypadku figury trójwymiarowej żadne trzy „szpilki” nie mogą jej ustabilizować, tzn. nie może powstać sytuacja taka, jak na rysunku 4b.

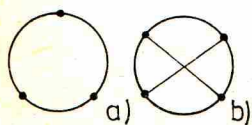
Nietrudno zauważyć na podstawie rysunków 4a,c,d, że wbicie czwartej szpilki tuż przy brzegu figury  $Q$  nie zawsze powoduje ustabilizowanie tej figury. Wbijając gdziekolwiek na łuku  $a_0a_1a_2$  (rys. 4a) niczego w zakresie „przesuwalności” figury  $Q$  nie zmienimy; można ją będzie nadal przesuwać w każdym kierunku między kierunkami wskazanymi obok rysunku (i wzdłuż tych kierunków też). Podobnie wygląda sprawa z figurą przedstawioną na rysunku 4c, gdy czwartą szpilkę wbijemy gdziekolwiek na łuku  $a_0a_1a_2$  – nie uniemożliwi ona przesunięcia we wskazanym kierunku. Taki sam rezultat będzie, gdy czwartą szpilkę wbijemy w odcinek  $a_1a_2$  figury przedstawionej na rysunku 4d, ale gdy wbijemy ją w którymś punkcie łamanej  $a_0a_1$  nie zawierającej  $a_2$  (lub łamanej  $a_0a_2$  nie zawierającej  $a_1$ ), to uniemożliwi ona przesunięcia w pewnych kierunkach, choć wraz z  $a_0, a_1, a_2$  nie będzie stanowił układu stabilizującego tej figury. Można jednak bez trudu spostrzec, że w przypadku figury przedstawionej na rysunku 4a lub 4c (wraz z zaznaczonymi tam szpilekami zagradzającymi przesunięcia) można wskazać taki punkt  $a_3$  „tuż przy brzegu” tej figury, że wraz z poprzednimi punktami  $a_0, a_1, a_2$  tworzy on układ stabilizujący (porównaj z rysunkiem 6). Dla figury z rysunku 4d można znaleźć takie punkty  $a_3$  i  $a_4$ , które wraz z zaznaczonymi  $a_0, a_1, a_2$  dają układ stabilizujący tej figury (rys. 6d). Położenie tych punktów na rysunku 6 jest jednym z wielu możliwych.



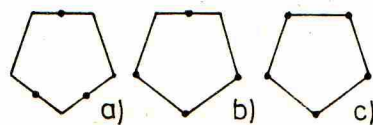
Rys. 6

Okazuje się przeto, że wystarczy mieć dostateczną liczbę szpilek, aby ustabilizować dowolnie wybraną figurę na płaszczyźnie (i w przestrzeni też). W sytuacjach przedstawionych na rysunku 6 liczba punktów stabilizujących jest równa 3, 4 i 5 w zależności od kształtu figury i rozmieszczenia tych punktów na jej brzegu (mówiliśmy, że „tuż przy brzegu”). Zauważmy jednak, że w przypadku figury przedstawionej na rysunku 6a jeden z punktów  $a_0$  lub  $a_1$  jest nieistotny dla jej stabilizacji – usunięcie któregośkolwiek z nich (przy pozostawieniu drugiego) nie umożliwi przesunięcia figury w żadnym kierunku. Powiemy zatem o układzie **wszystkich** punktów  $a_0, a_1, a_2, a_3$ , zaznaczonych na rysunku 6a, że jest on układem stabilizującym figury  $Q$ , ale nie układem istotnym. Natomiast układ punktów  $a_0, a_1, a_2, a_3$  na rysunku 6c jest istotnym układem stabilizującym figury  $Q$  z tego rysunku – znaczy to, że po usunięciu z tego układu jakiegokolwiek punktu znajdzie się kierunek, w którym bez przeszkód będzie można przesunąć figurę  $Q$ . Inaczej mówiąc, układ stabilizujący  $A$  jest **istotnym układem stabilizującym** figury  $Q$ , jeżeli usunięcie z niego jakiegokolwiek punktu sprawia, że przestaje on być układem stabilizującym tę figurę.

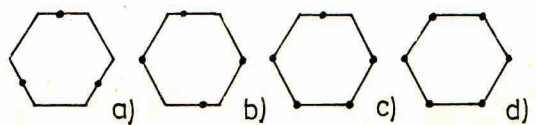
Dla koła można wskazać dwa istotne układy stabilizujące, różniące się liczbą punktów (i, oczywiście, rozmieszczeniem ich na okręgu); widzimy je na rysunku 7. Dla pięciokąta foremnego istotny układ stabilizujący może się składać z 3, 4 lub 5 punktów (rys. 8), a dla sześciokąta o równoległych przeciwległych bokach – z 3, 4, 5 lub 6 punktów (rys. 9).



Rys. 7

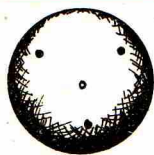


Rys. 8

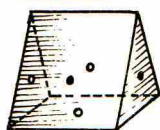
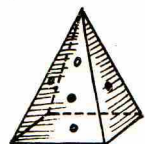


Rys. 9

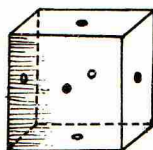




4 punkty

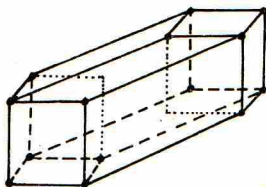


5 punktów



6 punktów

Rys. 10. Dla figur trójwymiarowych tak klarownego spostrzeżenia nie ma. Istnieją bowiem figury trójwymiarowe, których minimalne układy stabilizujące mają 4, 5 lub 6 punktów. Natomiast istotne układy stabilizujące figur trójwymiarowych mogą mieć od 4 do 14 punktów.



Rys. 11. Figura, dla której istnieje czternastopunktowy istotny układ stabilizujący; punkty układu umieszczone są w wierzchołkach tej figury.

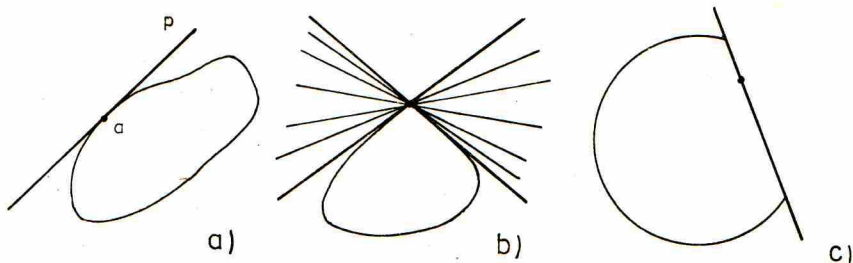
Maksymalna liczba punktów w istotnym układzie stabilizującym figury płaskiej wynosi sześć; ma to miejsce dla sześciokąta o równoległych przeciwległych bokach – i tylko dla niego (dowód w [2]).

Istotny układ stabilizujący figury  $Q$  nazwiemy **minimalnym**, jeżeli składa się on z możliwie najmniejszej liczby punktów. Wszystkie układy stabilizujące przedstawione na rysunkach 7, 8 i 9 są istotne, ale minimalne są tylko te, które składają się z trzech punktów. Powstaje więc naturalne pytanie o najmniejszą liczbę punktów w minimalnym układzie stabilizującym – czyżby dla figur płaskich liczbą tą było 3? Odpowiedź na to daje

**Spostrzeżenie** (L. Fejes Tóth, [1]). *Dla dowolnej figury płaskiej, różnej od równoległoboku, istnieje minimalny układ stabilizujący składający się z trzech punktów, a dla równoległoboku taki układ też istnieje i składa się z czterech punktów.*

Skoro każdą figurę płaską, różną od równoległoboku, można ustabilizować trzema punktami, to od razu chce się wiedzieć, jak powinny być rozmieszczone owe 3 punkty stabilizujące, bo Spostrzeżenie Fejes Tótha tego nie orzeka.

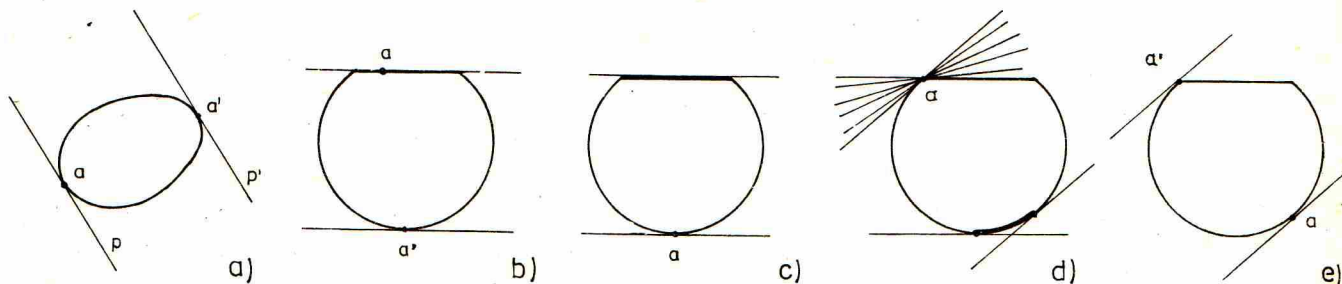
Aby odpowiedzieć na to pytanie, trzeba wprowadzić pewne pojęcia. Rozważmy wypukłą figurę  $Q$  z niepustym wnętrzem i weźmy punkt  $a$  z jej brzegu, a następnie poprowadźmy przez ten punkt prostą  $P$ , której żaden punkt nie należy do wnętrza figury  $Q$ . Inaczej mówiąc,  $P$  zawiera tylko punkty brzegu figury  $Q$ , a cała  $Q$  leży po jednej stronie  $P$ . Prostą  $P$  nazywa się **podpierającą** figury  $Q$  w punkcie  $a$ .



Rys. 12

Jeżeli punkt  $a$  jest regularny, to  $P$  pokrywa się ze styczną w tym punkcie; jeżeli natomiast  $a$  nie jest regularny (jest np. wierzchołkiem), to prosta podpierająca w takim punkcie nie jest wyznaczona jednoznacznie (rys. 12b).

Weźmy teraz pod uwagę prostą  $P'$  podpierającą figurę  $Q$ , która jest równoległa do  $P$ , ale od niej różna. Każdy punkt należący do  $P'$  i do brzegu  $Q$  nazywamy **quasi-antypodycznym** względem punktu  $a$ ; w przypadku, gdy jest tylko jeden taki punkt, to nazywamy go wprost **antypodycznym** do  $a$ .



Rys. 13

Na rysunkach 13a,b,e widzimy punkty antypodyczne. Warto zwrócić uwagę, że punkty quasi-antypodyczne na rysunkach 13c,d wypełniają pewien łuk brzegu figury.

Teraz już można odpowiedzieć na postawione pytanie o rozmieszczenie punktów minimalnego układu stabilizującego płaskiej figury wypukłej różnej od równoległoboku; wobec Spostrzeżenia Fejes Tótha w takim układzie są trzy punkty. Otóż pierwszy z nich, oznaczmy go  $a_0$ , możemy wybrać zupełnie dowolnie, ale drugi,  $a_1$ , trzeba wybrać tak, aby wyznaczony przezeń stożek nieprzesuwalności figury nie pokrywał się z takim stożkiem wyznaczonym przez  $a_0$ . Trzeci punkt układu minimalnego nie może być punktem quasi-antypodycznym ani do  $a_0$ , ani do  $a_1$  i nie może należeć do łuku przechodzącego przez  $a_0$  i  $a_1$ , zawartego w brzegu figury  $Q$  między punktami quasi-antypodycznymi do  $a_0$  i  $a_1$  (dowód w [3]). Dla równoległoboku minimalny układ stabilizujący, zgodnie ze Spostrzeżeniem, jest czteroelementowy; wnętrze każdego boku zawiera dokładnie jeden punkt takiego układu.

**Literatura cytowana:**

- [1] Fejes Tóth L., *On primitive polyhedra*, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 13(1962), 379-382.
- [2] Fudali S., *Six-point primitive fixing system in a plane*, Demonstratio Math. 19(1986), no 2, 341-348.
- [3] Fudali S., *Fixing system and homothetic covering*, Acta Math. Hung. 50(3-4)(1987), 203-225.

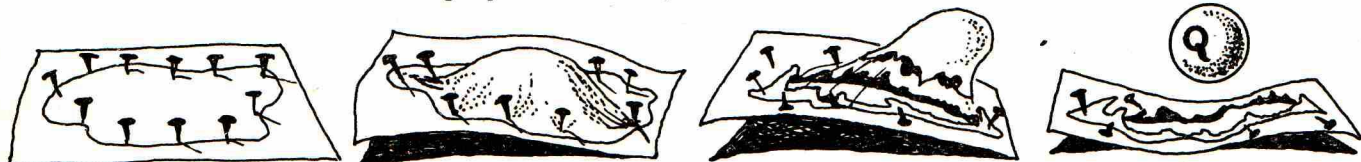


Dla figur trójwymiarowych rozmieszczenie punktów minimalnego układu stabilizującego jest zagadnieniem otwartym. Lukę tę mogą wypełnić Czytelnicy przysyłając do redakcji swoje pomysły z ich uzasadnieniem, dopisując na kopercie: *Układ stabilizujący* – wszystkie nadesłane listy przeczytam i prześlę swoją opinię.

Zwrócić tu trzeba uwagę na fakt, że w przestrzeni trójwymiarowej będziemy mieli do czynienia z figurami, których minimalny układ stabilizujący jest czteroelementowy, a także z figurami, dla których ten układ jest pięcio- i sześćoelementowy, przy czym nie jest pewne, czy do tych ostatnich należą tylko równoległosciany i nie jest jasne, dla jakich figur minimalny układ stabilizujący składa się z pięciu punktów.

Jako drugi temat dla Czytelników proponuję znalezienie w przestrzeni trójwymiarowej takich figur, których istotny układ stabilizujący jest co najwyżej trzynasto-, dwunasto-, ..., siedmioelementowy (figury, dla których taki układ jest co najwyżej sześćo-, pięcio- i czteroelementowy, pokazane są na rysunku 10, a figura z czternastoelementowym układem – na rysunku 11) i zbadanie, czy dla figury, dla której istnieje co najwyżej  $s$ -elementowy istotny układ stabilizujący ( $s \in \{5, 6, \dots, 14\}$ ) istnieje też układ  $(s - j)$ -elementowy dla  $j \in \{1, 2, \dots, s - 4\}$ . Dla kuli, na przykład, tak jest: istnieje sześciopunktowy istotny układ stabilizujący z punktami umieszczonymi w końcach trzech wzajemnie prostopadłych średnic, pięciopunktowy z trzema punktami na równiku i po jednym na każdym biegunie oraz czteropunktowy z punktami umieszczonymi w wierzchołkach czworościanu wpisanego w tę kulę (rzecz jasna, nie dowolnego – prawda?), ale czy dla innych figur jest tak również? I czy dla figur płaskich też tak jest?

Tematyka zaproponowana w artykule St. Fudalego może być, oczywiście, wykorzystana w pracach nadsyłanych na nasz Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki.



**Przedstawiamy:**

**Zadanie z XX Międzynarodowej Olimpiady Fizycznej**

t [°C]	p <sub>i</sub> /p <sub>0</sub>	
	i = A	i = B
40	0,284	0,07278
90	1,476	0,6918

Dane są dwie nie mieszające się cieczce A i B. Prężności par nasyconych p<sub>i</sub> (i = A lub B) tych cieczy spełniają zależność:

$$\ln(p_i/p_0) = \frac{a_i}{T} + b_i \quad (i = A \text{ lub } B),$$

gdzie p<sub>0</sub> oznacza ciśnienie normalne, T jest temperaturą bezwzględną pary, a a<sub>i</sub> i b<sub>i</sub> są pewnymi stałymi zależnymi od cieczy.

Wartości stosunku p<sub>i</sub>/p<sub>0</sub> dla cieczy A i B w temperaturach 40°C i 90°C są podane w tabelce.

I Wyznacz temperaturę wrzenia cieczy A i cieczy B pod ciśnieniem p<sub>0</sub>.

II Ciecze A i B wlane do naczynia, w którym uległy one rozwarstwieniu w sposób pokazany na rysunku 1. Powierzchnię cieczy B pokryto cienką warstwą nielotnej cieczy C, nie mieszającej się z cieczami A i B, zapobiegającej swobodnemu parowaniu z górnej powierzchni cieczy B. Stosunek mas cząsteczkowych cieczy A i B (w fazie gazowej) wynosi

$$\gamma = \mu_A/\mu_B = 8.$$

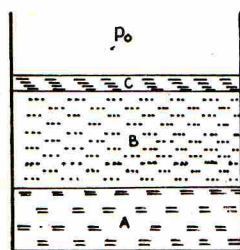
Masy cieczy A i B początkowo były równe i wynosiły m = 100 g. Wysokości słupów cieczy w naczyniu oraz gęstości cieczy są takie, że można przyjąć, iż ciśnienie w każdym punkcie naczynia praktycznie nie różni się od ciśnienia atmosferycznego równego ciśnieniu normalnemu p<sub>0</sub>.

Do układu cieczy w naczyniu powoli, w sposób jednostajny, dostarczamy ciepło. Okazuje się, że temperatura t cieczy zmienia się w czasie τ w sposób przedstawiony na rysunku 2.

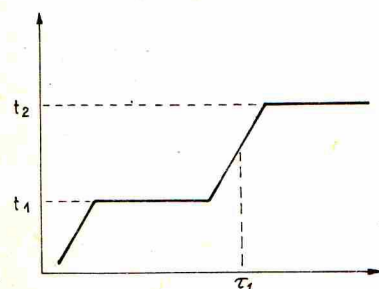
Wyznacz temperatury t<sub>1</sub> i t<sub>2</sub> odpowiadające poziomym odcinkom wykresu oraz masy cieczy A i B w chwili τ<sub>1</sub>.

Uwaga: Zakładamy, że pary cieczy:

- spełniają prawo Daltona głoszące, że ciśnienie mieszaniny gazów jest równe sumie ciśnień, jakie miałyby te gazy osobno;
- aż do ciśnień odpowiadających odpowiednim ciśnieniom par nasyconych można traktować jako gazy doskonałe.



Rys. 1



Rys. 2