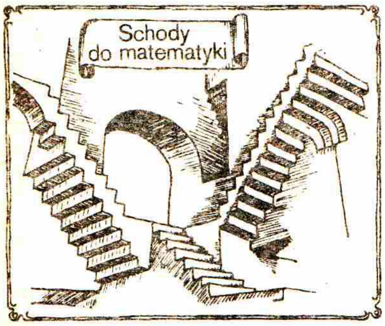
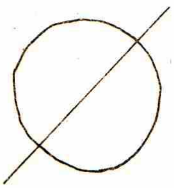


Placki ziemniaczane

Nietrudno przepołowić nożem okrągły placek ziemniaczany: wystarczy przeciąć go przez środek (rys. 1). *Wystarczy,* ale i *trzeba:* linia prosta dzieli koło na dwie części o równych polach wtedy i tylko wtedy, gdy przechodzi przez jego środek.

Równie łatwo jest podzielić na dwie równe części kwadrat i można to zrobić na wiele (*nieskończenie* wiele) sposobów i tak jak dla koła, każde cięcie musi przechodzić przez środek. Jak jest dla trójkąta równobocznego? Trudno by było przedstawić opisowo położenie linii prostej dzielącej na połowy nieregularny obszar, taki – jak na przykład – na rysunku 2. Możemy tylko udowodnić *twierdzenie egzystencjalne*:



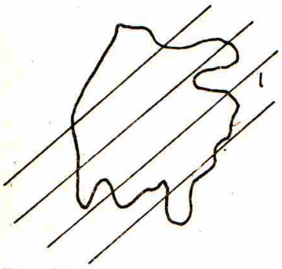
Rys. 1

Twierdzenie I. Jeżeli A jest obszarem na płaszczyźnie, to istnieje linia prosta dzieląca A na dwie części o równych polach.

„Dowód". Wykorzystamy znaną z analizy matematycznej **własność Darboux** funkcji ciągłej: jeżeli $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ jest funkcją ciągłą, taką że $f(a) < 0$, a $f(b) > 0$, to istnieje wewnątrz przedziału $[a,b]$ taka liczba c, że $f(c) = 0$. Wyrażona tu własność ujmuje bodajże najbardziej istotny aspekt pojęcia ciągłości: linie ciągłe nie mogą przenikać wzajemnie przez siebie nie przecinając się.

Rozpatrzmy więc obszar A (rys. 2), wybierzmy dowolnie kierunek $\vec{w}$ i patrzmy, co się dzieje, gdy pewną prostą l przesuwamy równolegle w kierunku $\vec{w}$. Określmy funkcję, której wartością jest różnica pól części, na które l rozcina A. Gdy l jest całkowicie „pod" A, czyli jedna z części jest pusta, wartość funkcji jest dodatnia, dla drugiego położenia – ujemna. Zatem gdzieś „w środku" musi być równa zeru, tj. obie części mają równe pola.

Do tego fragmentu tekstu można odnieść kilka uwag. Dlaczego słowo „dowód" wziąłem w cudzysłów? Ponieważ nie jest to ścisły dowód, a właściwie tylko jego pomysł. Używamy też pojęcia pola w niedostatecznie precyzyjny sposób. W nie do końca jasny sposób określiliśmy funkcję i korzystaliśmy z jej ciągłości nawet bez prób uzasadnienia. Nie wiadomo, dla jakich obszarów nasze twierdzenie jest stosowalne (czy naprawdę rozumowanie jest dobre dla każdych?). No, ale tak pracuje każdy matematyk i chyba każdy intelektualista: najpierw pomysł, potem staranne przetworzenie go i dopracowanie szczegółów. Wpadnięcie na pomysł wymaga intuicji i wiedzy, opracowanie go – wiedzy, techniki i rzetelności.



Rys. 2

Drugą uwagą, którą warto zrobić, jest to, że udowodniliśmy właściwie twierdzenie mocniejsze niż I, a mianowicie:

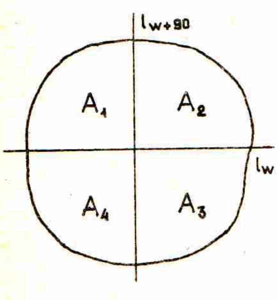
Twierdzenie II. Jeżeli A jest obszarem na płaszczyźnie, to istnieje linia prosta dzieląca A na dwie części o równych polach. Prosta ta może mieć dowolny, przedtem obrany kierunek.

Kolisty placek można też podzielić na cztery równe ćwiartki (rys. 3). Matematycznie własność ta to, oczywiście,

Twierdzenie III. Dowolny obszar na płaszczyźnie można podzielić na cztery części o równych polach dwiema prostymi prostopadłymi.

Dowód (równie ścisły, jak i poprzedni). Wybierzmy prostą l_α połowiącą obszar i tworzącą z ustaloną osią kąt $\alpha \in [0°, 90°]$. Podzielmy A na dwie połowy inaczej, za pomocą prostej prostopadłej do l_α. Mamy (rys. 3)

$$A_1 + A_2 = A_3 + A_4 \quad \text{oraz} \quad A_1 + A_4 = A_2 + A_3 .$$



Rys. 3

Określamy funkcję $f : [0°, 90°] \to \mathbf{R}$ wzorem $f(\alpha) = A_1(\alpha) - A_2(\alpha)$. Ponieważ na obu końcach przedziału określoności ma ona przeciwne znaki, więc (znów nie dyskutujemy, *dlaczego* jest ciągła) gdzieś wewnątrz się zeruje. Dla pewnego kąta α_0 mamy więc $A_1(\alpha_0) = A_2(\alpha_0)$, zatem wszystkie cztery części mają równe pola. Możemy jednym cięciem podzielić na dwie równe części dwa okrągłe placki: ciąć należy, oczywiście, wzdłuż prostej łączącej dwa środki. Do zrealizowania takiego podziału placki nie muszą być koliste:

Twierdzenie IV. Dla dowolnych dwóch obszarów na płaszczyźnie istnieje prosta przecinająca je na dwie części o równych polach.

Dowód... pozostawiamy Czytelnikom.

Sami przejdziemy do trzeciego wymiaru, ale przedtem przekonajmy się, że twierdzenie IV nie jest prawdziwe dla trzech płaskich obszarów – nie znajdziemy takiej linii dla trzech kół, których środki nie leżą na jednej prostej.

Twierdzenie V. Dowolne trzy bryły w przestrzeni trójwymiarowej da się przeciąć płaszczyzną tak, by wszystkie trzy podzieliły się na części o równych objętościach.

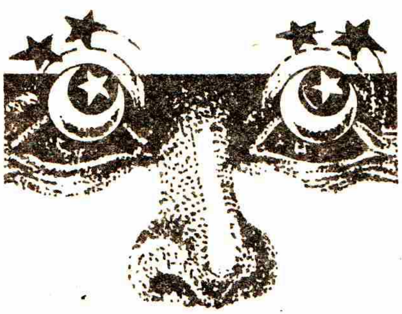
Bywa to nazywane *twierdzeniem o kanapkach:* „zawsze można bułkę z masłem i szynką przekroić płaskim cięciem tak, by przepołowić bułkę, masło i szynkę"; cytuję tu *Kalejdoskop Matematyczny* Hugona Steinhausa. I tę własność da się wyprowadzić z twierdzenia o wartości średniej. Możemy wypracować sobie inne podejście do takich zagadnień rozcinania. Przy dzieleniu bułki z masłem i szynką jeden stopień swobody potrzebny jest do ustawienia noża tak, by przeciąć na pół bułkę, drugi – masło, trzeci – szynkę. Właśnie ta liczba stopni swobody decyduje o tym, ile obszarów możemy przepołowić „za jednym zamachem", a to, czy cięcia będą płaskie jest sprawą drugorzędną. Linia prosta na płaszczyźnie ma takie dwa „stopnie swobody", powiedzmy, nachylenie do danej osi i punkt przecięcia z nią, płaszczyzna w przestrzeni – 3, para prostych prostopadłych na płaszczyźnie – też 3. Trzy stopnie swobody ma też okrąg: dwie współrzędne środka i promień. Dlatego też powinno być prawdziwe następujące

Twierdzenie VI. Dla dowolnych trzech obszarów płaskich istnieje okrąg przecinający je na części o równych polach.

Jest tak w istocie – dowodu znów nie podamy. Proponujemy zastanowić się nad nim oraz nad innymi, ciekawymi Twierdzeniami o Połowieniu, na przykład za pomocą parabol na płaszczyźnie, sfer i par płaszczyzn w przestrzeni i za pomocą... czego się tylko da.

dr Michał SZUREK

Patrz w niebo



Obecność w przeszłości wody na Marsie nie ulega wątpliwości – ślady pozostawione przez nią są uderzające. Na zdjęciach wykonanych przez sondy wyraźnie widać liczne koryta dawnych rzek i obszary pokryte rzecznymi osadami. Zarazem wiadomo, że powierzchnia Marsa jest pustynią. Gdzie więc podziała się ta woda? Na podstawie pomiarów wilgotności atmosfery, wykonanych przez Vikingi, ocenia się, że cała woda atmosferyczna mogłaby pokryć powierzchnię planety warstwą grubości 10 μm. Nawet gdyby dodać do tego wodę zawartą w czapach polarnych, to i tak byłoby jej za mało w stosunku do ocen dokonanych na podstawie widocznej rzeźby terenu. Według wszelkiego prawdopodobieństwa woda marsyjska znajduje się obecnie głęboko wewnątrz gruntu.

Uderzeniowe kratery rozsiane po całej powierzchni Marsa dowodzą, że planeta – podobnie jak Księżyc – zresztą inne planety też, tylko na Księżycu najwyraźniej to widać – wkrótce po uformowaniu się podlegała silnemu bombardowaniu przez ciała meteorowe. W wyniku tego grunt został pokruszony prawdopodobnie do głębokości kilku kilometrów i tak stał się zdolny wchłonąć stosunkowo dużą ilość wody.

Zauważmy, że na Marsie jest w zasadzie tak zimno, że niemal w każdej sytuacji woda na powierzchni planety powinna zamarznąć. Jednak w najcieplejszych okresach roku i w okolicach równika może panować temperatura w pobliżu zera stopni Celsjusza, a wtedy woda, zwłaszcza wzbogacona w rozpuszczalne sole, może przez dłuższy czas znajdować się w stanie ciekłym, a zatem może wsiąkać w grunt. Potwierdzeniem tego są wyraźne sezonowe zmiany zdolności odbijania fal radarowych przez grunt marsyjski, jako że współczynnik odbicia fal jest dość czułą miarą wilgotności gruntu.

Głęboko pod powierzchnią planety woda najprawdopodobniej znajduje się w stanie ciekłym wskutek ciepła wywiązującego się przy rozpadzie radioaktywnych pierwiastków zawartych w skałach skorupy. Woda ta niekiedy przebija się lub przynajmniej przebijała się na powierzchnię, o czym świadczą ślady w postaci dolin rzecznych pochodzących jakby z wielkich powodzi. Również niektóre kratery wyglądają jakby powstały przy upadku meteoroidu w gęste błoto, a nie na twardy grunt.

Nie ma jeszcze, oczywiście, pełnej jasności co do ilości, stanu fizycznego i rozkładu wody w marsyjskim gruncie. Jako dalszy etap badań przewiduje się zainstalowanie na Marsie sieci sejsmografów. Umożliwiłaby ona z biegiem czasu odtworzenia globalnej struktury wnętrza Marsa, a tym samym przyczyniłaby się do rozstrzygnięcia zagadki marsyjskiej wody. Tego rodzaju eksperyment planowany jest na połowę lat 90.

dr Tomasz KWAST