Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem Klubu **44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**.
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 7/1990.

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 XI 1990

Zadania z matematyki nr 207, 208

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

207. Liczby rzeczywiste x, y, z spełniają zależność

$$\frac{x^2+y^2-z^2}{2xy}+\frac{y^2+z^2-x^2}{2yz}+\frac{z^2+x^2-y^2}{2zx}=1.$$

Dowieść, że dwa spośród ułamków będących składnikami lewej strony powyższej równości mają wartość 1 (a pozostały -1).

208. Rozważmy ciąg funkcji (f_n) określonych na przedziale $(0;\pi)$ wzorem rekurencyjnym: $f_1(x)=\sin x$, $f_{n+1}(x)=(\sin x)^{f_n(x)}$. Dla każdej liczby naturalnej n obliczyć granicę prawostronną funkcji f_n w punkcie 0.

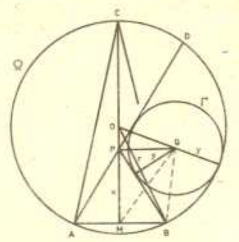
Zadanie **208** zaproponował pan Krzysztof Zapisek z Warszawy.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 4/1990

Przypominamy treść zadań:

199. Przez dowolny punkt P wysokości CM trójkąta równoramiennego ABC ($|AC|=|BC|$) prowadzimy półprostą $AP^{\rightarrow}$; przecina ona okrąg Ω opisany na trójkącie ABC w punkcie D. Przy jakim położeniu punktu P okrąg Γ styczny do odcinków PD, PB i łuku BD okręgu Ω ma maksymalną średnicę?

200. Mamy sześcian zbudowany z n^3 kostek. Na ile sposobów można go rozebrać zdejmując po jednym klocku? (Wolno za każdym razem zdjąć dowolny klocek, na którym nie stoi żaden inny.) Dla jakiego n znaleziona wartość przekroczy trylion?



199. Przyjmijmy oznaczenia: $|CM|=h$, $|MP|=x$; O, r – środek i promień okręgu Ω; Q, y – środek i promień okręgu Γ. Prosta PQ połowi kąt BPD. Jest więc równoległa do AB, wobec czego trójkąty PQM i PQB mają równe pola:

(1) $|PQ|\cdot x=|PB|\cdot y$.

Rozważając trójkąty prostokątne OPQ, PMB, OMB dostajemy zależności

(2) $|PQ|^2=|OQ|^2-|OP|^2=(r-y)^2-|r+x-h|^2$,

(3) $|PB|^2=|MP|^2+|OB|^2-|OM|^2=x^2+r^2-|h-r|^2$.

Podnosząc (1) stronami do kwadratu i podstawiając (2), (3) otrzymujemy po przekształceniach równanie kwadratowe względem y

$$ay^2+by+c=0$$

o współczynnikach

$$a=(2r-h)h,\quad b=2rx^2,\quad c=x^2(h-x)(h-x-2r).$$

Dodatnim pierwiastkiem tego równania jest liczba

(4) $$y=x(h-x)/h$$

(drugi pierwiastek jest ujemny, bo $a>0>c$). Znaleziona wartość (4) osiąga maksimum, gdy $x=\frac{1}{2}h$, czyli gdy P jest środkiem odcinka CM.

(Warto zauważyć, że wzór (4) ma następującą interpretację: średnica okręgu Γ jest średnią harmoniczną długości odcinków, na które punkt P dzieli wysokość CM.)

200. Sześcian tworzy n^2 kolumn („słupków"), po n klocków w każdej. Ponumerujmy te kolumny liczbami od 1 do n^2. Każdy kolejny ruch jest wyznaczony przez podanie numeru kolumny. Sposobów rozebrania sześcianu jest więc tyle, ile ciągów długości n^3 o wyrazach ze zbioru $\{1,\ldots,n^2\}$, w których każdy symbol (od 1 do n^2) występuje n-krotnie. Oznaczmy liczbę tych ciągów przez $f(n)$.
Miejsca zajęte przez symbol 1 (n miejsc) można ustalić na $\binom{n^3}{n}$ sposobów. Zostaje n^3-n miejsc; n spośród nich zajmuje symbol 2; można je wybrać na $\binom{n^3-n}{n}$ sposobów. Kontynuując to rozumowanie dochodzimy do równości

$$f(n)=\prod_{k=0}^{n^2-1}\binom{n^3-kn}{n}=$$

$$=\left(\frac{1}{n!}\right)^{n^2}\prod_{k=0}^{n^2-1}\frac{(n^3-kn)!}{(n^3-(k+1)n)!}=(n^3)!\,(n!)^{-n^2}.$$

Już dla $n=3$ mamy

$$f(3)=27!\cdot 6^{-9}>$$
$$>27\cdot 24^3\cdot 21^3\cdot 18^3\cdot 15^3\cdot 12^3\cdot 9^3\cdot(8!)\cdot 6^{-9}=$$
$$=3^{21}\cdot\left(\frac{8!}{2}\right)^3\cdot(8!)\cdot 6^{-9}=2^{-3}(8!)^4(3^7 6^{-3})^3>$$
$$>2^{-3}\cdot(4\cdot 10^4)^4\cdot 10^3>3\cdot 10^{20},$$

a więc kilkaset trylionów.
(Dla ciekawych: dokładna wartość $f(3)=1\ 080\ 491\ 954\ 750\ 208\ 000\ 000$; dalsze przybliżone wartości: $f(4)=1{,}04\ldots\cdot 10^{67}$, $f(5)=1{,}97\ldots\cdot 10^{157}$.)