Termin nadsyłania rozwiązań:
30 XI 1990

Zadania z fizyki nr 105, 106

105. Statek o okresie własnym kołysania poprzecznego równym T płynie z prędkością $\mathbf{v}$ przez fale oceaniczne o długości d, poruszające się z prędkością $\mathbf{u}$. Przy spełnieniu jakich warunków wystąpią cztery różne „wrażliwe kursy" statku, dla których działanie fal na statek będzie wzbudzało jego drgania własne?
Kurs statku określony jest przez wektor $\mathbf{v}$.

106. Jednorodny, wiotki, cienki, obdarzony masą sznurek lub łańcuszek o długości l, zawieszony na jednym końcu, może wykonywać drgania poprzeczne o różnych częstotliwościach, którym odpowiada różna liczba węzłów (jeden z nich występuje zawsze w punkcie zawieszenia). Częstotliwości takich małych drgań są proporcjonalne do $\sqrt{g/l}$ (g – przyspieszenie ziemskie). Obliczyć – w sposób numeryczny – pierwsze cztery częstotliwości małych drgań tego sznurka (tj. wyznaczyć bezwymiarowy współczynnik proporcjonalności), przyjmując, że poszczególne elementy sznurka drgają harmonicznie z tą samą częstotliwością, lecz z różnymi amplitudami. Zachęcamy do porównania otrzymanych wyników z danymi doświadczalnymi.

Rozwiązania zadań z numeru 4/1990

Przypominamy treść zadań:

97. Wyobraźmy sobie w miejscu Ziemi oraz Marsa planety składające się wyłącznie z wody (i nie posiadające księżyców). Jakie co najmniej powinny być średnice tych planet, aby mogły one istnieć w sposób trwały?

98. Po tafli lodowiska otoczonego owalną bandą (rys. obok), ślizga się krążek hokejowy. Krążek wystrzeliwany jest z punktu A pod kątem α względem osi lodowiska. Przy jakich wartościach kąta α krążek wróci do punktu startowego? Zakładamy, że banda ogranicza figurę złożoną z kwadratu i dwóch połówek koła oraz że odbicia krążka są doskonale sprężyste.

97. Głównym czynnikiem decydującym o trwałości wodnej planety jest ucieczka cząsteczek wody z otaczającej planetę warstwy pary wodnej (atmosfery) w przestrzeń kosmiczną. Problem ucieczki gazu atmosferycznego z planety był omawiany w rozwiązaniu zadania 66 (*Delta* nr 7/1988), skąd czerpiemy wzór na promień planety

$$r_0 = \sqrt{\frac{9RT}{8\pi G\rho\mu}}$$

(R – stała gazowa, T – temperatura, G – stała grawitacji, ρ – gęstość planety, μ – masa cząsteczkowa gazu atmosfery), przy którym średnia prędkość termiczna cząsteczek gazu jest równa prędkości ucieczki z planety. Atmosfera utrzymuje się na planecie w kosmicznej skali czasu, gdy promień planety $r > wr_0$, przy czym $w = 5$ (patrz omówienie rozwiązań zadania 66 w numerze 1/1989). W przypadku planety wodnej atmosfera odnawia się przez parowanie wody (ew. sublimację lodu), co prowadzi do ubytku substancji planety. Ponieważ względny ubytek masy planety jest znacznie mniejszy od względnego ubytku masy atmosfery, można (szacunkowo) przyjąć $w \cong 1$.
Temperatury na wodnych planetach powinny być zbliżone do panujących na Ziemi (~ 280 K) oraz Marsie (~ 230 K). Odpowiadające tym temperaturom wartości r wynoszą odpowiednio 840 km oraz 760 km, a więc minimalny promień jest rzędu 1000 km.

98. W związku z tym, że krążek ślizga się po lodzie z pewnym tarciem, a więc zasięg jego toru jest ograniczony, bierzemy pod uwagę jedynie niewielką liczbę odbić krążka od bandy.
Algorytm programu komputerowego, który znajdzie poszukiwane wartości kąta α, może wyglądać jak niżej:
Dla kolejnych wartości kąta α: $\alpha_k = k\Delta\alpha$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$, $\Delta\alpha$ – bardzo mały kąt) dokonujemy następujących operacji:
(1) wyznaczamy równanie prostej p_1 pierwszego odcinka toru;
(2) znajdujemy współrzędne punktu P_1 pierwszego odbicia od bandy (punkt przecięcia prostej p_1 z bandą);
(3) wyznaczamy równanie stycznej s_1 do bandy w punkcie P_1;
(4) na podstawie równań prostych p_1 i s_1 wyznaczamy równanie prostej p_2 drugiego odcinka toru;
(5) powtarzamy operację (2) dla prostej p_2 wyznaczając punkt P_2 drugiego odbicia;
(6) sprawdzamy, czy punkt P_2 nie pokrywa się z punktem startowym A (ze względu na skończoną wartość $\Delta\alpha$ oraz na niedokładności obliczeń numerycznych przyjmujemy, że omawiane punkty się pokrywają, jeżeli odległość między nimi jest mniejsza od $\varepsilon \ll R$, gdzie R – promień półokręgów), jeśli tak – wypisujemy wartość kąta α_k, dla którego nastąpił powrót krążka do punktu A, jeśli nie – kontynuujemy dalsze operacje, wyznaczając kolejne p_i oraz P_i, aż np. do $i = 5$.
Przy prawidłowym doborze wartości $\Delta\alpha$ i ε jako odpowiedź powinno się z reguły otrzymywać nie pojedyncze wartości α_k, lecz ich serie dla kolejnych kilku (kilkudziesięciu) wartości k. Zbyt duże $\Delta\alpha$ lub zbyt małe ε stwarzają niebezpieczeństwo „zgubienia" pewnych rozwiązań, które przypadną między dwoma kolejnymi kątami α_k i α_{k+1}.
Wyniki obliczeń komputerowych, wykonanych dla $\Delta\alpha = 5 \cdot 10^{-7}\pi$, $\varepsilon = 10^{-3}R$, są przedstawione na histogramie (dolny rysunek na tylnej okładce). Na osi odciętych zaznaczono wartości kąta $\alpha \in \langle 0, \pi/2)$ spełniające warunki zadania. Wysokość odcinków odpowiada liczbie kątów α_k występujących w każdej serii (co stanowi miarę tolerancji błędu, jaki można popełnić wystrzeliwując krążek pod danym kątem); rozpiętość kątów w serii wynosi tu co najwyżej około $0{,}01°$, jest więc mniejsza od dokładności wykresu. Przy każdym odcinku podano liczbę występujących odbić (maksymalnie cztery) oraz oznaczenia literowe.
Na górnym rysunku na tylnej okładce pokazane są tory dla 1, 2 i 3 odbić. Dodatkowo trzeba jeszcze uwzględnić tory utworzone przez odbicia symetryczne względem długiej osi lodowiska. Okazuje się, że pomimo bardzo małej wartości kroku $\Delta\alpha$ nie wszystkie z tych torów w przypadku 4 odbić pojawiły się w obliczeniach. Nie ma więc gwarancji, że któreś z rozwiązań dla większej liczby odbić nie zostanie przeoczone. Zastosowane symbole literowe odpowiadają oznaczeniom na histogramie. Para tych samych liter z primem i bez odpowiada temu samemu torowi (bądź dwóm torom symetrycznym) przebieganemu w dwóch kierunkach.