Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:

31 X 1990

Lista uczestników ligi zadaniowej

Klub 44 F

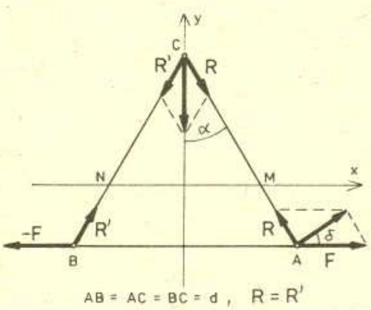
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 89 (WT=2,48) i 90 (WT=2,59)

Tomasz Wietecha	–Tarnów	45,45
Aleksander Surma	–Myszków	1–43,85
Piotr Koczyński	–Warszawa	39,57
Wojciech Peisert	–Wrocław	35,32
Piotr Bała	–Toruń	3–35,27
Zbigniew Gallas	–Kraków	32,46
Andrzej Borowski	–Aleksandrów Kuj.	30,84
Przemysław Gworys	–Częstochowa	30,19
Jacek Stelmach	–Zabrze	1–29,44
Marek Karaś	–Tarnów	29,30
Mariusz Bogacz	–Pińczów	28,86
Janusz Osada	–Legnica	24,07
Adam Sikorski	–Lublin	1–23,79
Paweł Rogocz	–Legnica	23,63
Andrzej Bonk	–Chełmża	23,22
Anna Glusa	–Toruń	1–23,16
Bogusław Mikielewicz	–Brodnica	1–21,99
Tomasz Rusin	–Warszawa	21,15
Andrzej Bilmes	–Gorlice	20,82
Robert Repucha	–Gołdap	1–20,68
Wojciech Klimala	–Bielsko-Biała	19,44
Maciej Stasiak	–Człuchów	18,73
Andrzej Kondracki	–Białystok	16,37
Leszek Motyka	–Kraków	16,13
Mirosław Semla	–Opole	15,20
Piotr Wach	–Katowice	1–12,33
Paweł Perkowski	–Szczecin	1– 9,36
Leszek Szalast	–Radzyń Podl.	1– 6,58
Tomasz Rawlik	–Gliwice	1– 6,22
Dzierżysław Lipniacki	–Lublin	3– 4,49
Roman Musiał	–Katowice	1– 4,40
Wiesław Kacprzak	–Kraków	1– 2,47
Jerzy Lipkowski	–Elbląg	2– 1,50

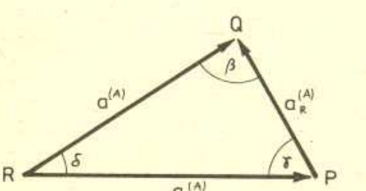
Pan Wietecha został szesnastym członkiem Klubu 44F.

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników, którzy zgromadzili co najmniej 15 punktów oraz członków Klubu 44F niezależnie od ich aktualnego stanu konta. Cyfra przed kreską oznacza, ile razy uczestnik zdobył już 44 punkty.

Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Zadania z fizyki nr 103, 104

Redaguje dr Andrzej NADOLNY

103. Angielska moneta pięćdziesięciopensowa ma kształt zbliżony do graniastosłupa o podstawie siedmiokąta foremnego, z tym że podstawa ograniczona jest nie odcinkami prostych, lecz łukami okręgów, których środki leżą w przeciwległych wierzchołkach. Promienie tych okręgów mają długość 3 cm. Obliczyć w sposób przybliżony, z jaką prędkością moneta ta może się toczyć po poziomej płaszczyźnie, aby nie traciła kontaktu z podłożem. Przyjąć, że dopóki występuje kontakt z podłożem, nie ma poślizgu.

104. Dlaczego refleksy świateł lamp ulicznych obserwowane na mokrej jezdni mają kształt podłużnych smug? Jaki jest kierunek tych smug?

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 10/1989

Przypominamy treść zadań:

95. Płot składający się z pionowych desek o szerokości a, między którymi występują szczeliny o szerokości b, zasłania odległy obiekt. Obserwator porusza się równolegle do płotu, w odległości d od niego, ze stałą prędkością v. Jaka powinna być ta prędkość, aby obserwator mógł widzieć cały obiekt w sposób możliwie niezakłócony? Przyjmujemy, że kierunek obserwacji jest prostopadły do płotu, a rozmiary kątowe obiektu są znacznie większe od stosunku b/d.

96. Trzy punkty materialne o masie m, obdarzone ładunkiem elektrycznym q, są połączone nieważkimi nićmi o jednakowej długości d. W stanie równowagi, w warunkach bezgrawitacyjnych, nici tworzą trójkąt równoboczny. Wyznaczyć przyspieszenie każdego z punktów materialnych w chwili przecięcia jednej z nici.

95. Przy prostopadłym do płotu kierunku obserwacji (rys. 1) częstotliwość „migania" desek i szczelin płotu wynosi $\nu = v/(a+b)$. Aby miganie to nie było odczuwane przez wzrok, powinno zachodzić $\nu \geq 20\ \mathrm{s}^{-1}$ (cecha ludzkiego wzroku), czyli $v \geq (a+b)\cdot 20\ \mathrm{s}^{-1}$. Oczywiście, uśrednione natężenie światła dochodzącego od obiektu do obserwatora będzie zmniejszone w stosunku $b/(a+b)$.

Należy jeszcze zwrócić uwagę na to, że przy $d \gg 1$ m płot znajduje się w strefie ostrego widzenia wzroku akomodowanego na „nieskończenie" odległy przedmiot. Zachodzi wówczas niebezpieczeństwo (zależne od prędkości kątowej v/d oraz od stosunku $(a+b)/d$) mimowolnego wodzenia wzrokiem za przesuwającym się płotem, co istotnie utrudnia obserwację obiektu.

96. Wprowadźmy układ współrzędnych jak na rysunku 2, o początku w środku masy układu (w środku trójkąta) i osi x równoległej do przecinanej nici. W chwili przecięcia nici na punkty materialne A i B działają niezrównoważone siły elektrostatyczne $\mathbf{F}$ oraz $-\mathbf{F}$ wzajemnego odpychania o wartości

$$F = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2}$$

(ε_0 – stała dielektryczna próżni) i kierunku równoległym do osi x oraz siły $\mathbf{R}$ i $\mathbf{R'}$, które są wypadkowymi sił napięcia nici oraz sił odpychania elektrostatycznego przez ładunek w punkcie C. Z warunku nierozciągliwości nici oraz z faktu, że środek masy układu pozostaje w spoczynku (w środku układu współrzędnych), wynika określony tor ruchu każdego z punktów materialnych. Punkt C porusza się wzdłuż osi y, natomiast odpowiednie punkty M i N przecięcia odcinków AC i BC z osią x ($CM = 2\,MA$, $CN = 2\,NB$) pozostają na osi x. Wyrażając współrzędne punktu A przez kąt α, jaki tworzy odcinek AC z osią y, mamy:

$$x = d\sin\alpha, \quad y = -(1/3)d\cos\alpha.$$

W chwili, gdy zaczyna się ruch punktu A, wektor przyspieszenia tego punktu $\mathbf{a}^{(A)}$ jest styczny do toru. Kąt δ, jaki wektor ten tworzy z osią x, spełnia związek:

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{a_y}{a_x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\alpha} : \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{d\sin\alpha}{3d\cos\alpha} = \frac{1}{3}\operatorname{tg}\alpha.$$

Ponieważ $\alpha = \pi/6$, więc $\operatorname{tg}\alpha = 1/\sqrt{3}$, a zatem $\operatorname{tg}\delta = 1/3\sqrt{3}$.

Dla wyznaczenia wartości $a^{(A)} = |\mathbf{a}^{(A)}|$ skorzystamy z rysunku 3, wyrażającego równość wektorową $\mathbf{a}^{(A)} = \mathbf{a}_F^{(A)} + \mathbf{a}_R^{(A)}$, w której $\mathbf{a}_F^{(A)} = \mathbf{F}/m$, $\mathbf{a}_R^{(A)} = \mathbf{R}/m$ oraz z równości $\gamma = \pi/3$, $\delta = \operatorname{arctg} 1/3\sqrt{3}$, $\beta = (2/3)\pi - \delta$. Na podstawie twierdzenia sinusów dla trójkąta PRQ mamy

$$a^{(A)} = \frac{\sin\gamma}{\sin\left(\frac{2}{3}\pi - \delta\right)}\, a_F = \frac{\sqrt{21}}{5}\, a_F.$$

Teraz można z łatwością wyznaczyć współrzędne wektora

$$a_x^{(A)} = a^{(A)}\cos\delta = \frac{9}{10}\, a_F, \quad a_y^{(A)} = a^{(A)}\sin\delta = \frac{\sqrt{3}}{10}\, a_F.$$

Dla punktów B i C odpowiednie wartości wynoszą:

$$a_x^{(B)} = -\frac{9}{10}\, a_F, \quad a_y^{(B)} = \frac{\sqrt{3}}{10}\, a_F, \quad a_x^{(C)} = 0, \quad a_y^{(C)} = -\frac{\sqrt{3}}{5}\, a_F.$$

Lista uczestników ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 191 (WT=2,11) i 192 (WT=2,27)

Edward Orzechowski	-Warszawa	2-43,68
Marian Roman	-Ełk	1-43,09
Adam Przeździecki	-Warszawa	42,85
Kazimierz Serbin	-Sanok	2-42,72
Andrzej Sudoł	-Nowy Sącz	42,56
Jerzy Janowicz	-Bolesławiec	6-41,95
Krzysztof Zawisławski	-Warszawa	1-41,45
Józef Siwy	-Łaziska Grn.	1-40,89
Jerzy Małopolski	-Kraków	1-40,86
Adam Czornik	-Bytom	40,37
Dariusz Rybacki	-Kraśnik	40,18
Grzegorz Kuś	-Kraków	39,93
Andrzej Krzysztofowicz	-Gdańsk	39,01
Andrzej Szymczak	-Gdańsk	37,73
Henryk Kornacki	-Augustów	36,95
Konrad Pióro	-Warszawa	1-36,78
Marek Gałecki	-Milanówek	5-36,70
Dzierżysław Lipniacki	-Lublin	36,66
Zygmunt Bartkowski	-Warszawa	36,49
Wojciech Krzyżański	-Żywiec	34,45
Artur Smolczyk	-Tarnów Op.	1-33,68
Jerzy Tyszkiewicz	-Warszawa	33,28
Paweł Kubit	-Krosno	33,11
Tomasz Rawlik	-Gliwice	3-33,03
Mariusz Łopusiewicz	-Legnica	32,15
Piotr Figurny	-Lubartów	1-31,39
Krzysztof Jakubczak	-Kudowa Zdrój	31,00
Dariusz Kowalczyk	-Warszawa	29,81
Zbigniew Gallas	-Kraków	1-29,51
Władysław Wasiak	-Toruń	28,92
Anna Gluza	-Toruń	1-28,86
Mirosław Matlęga	-Skoczów	28,50
Jarosław Kaczyński	-Starogard Gd.	28,31
Tomasz Grzesiak	-Kraków	28,19
Stanisław Dorosz	-Kraków	28,06
Maciej Głuszek	-Wrocław	27,85
Janusz Prajs	-Opole	27,57
Piotr Jędrzejewicz	-Toruń	2-27,33
Tomasz Komorowski	-Świdnik	2-26,82
Adrian Langer	-Nisko	26,65
Jerzy Cisło	-Wrocław	26,56
Radosław Zapert	-Kielce	26,51
Krystyna Witek	-Ostrów Maz.	1-26,29
Ryszard Pagacz	-Zawadzkie	2-25,72
Tomasz Wietecha	-Tarnów	25,11
Andrzej Kondracki	-Białystok	25,03
Krzysztof Zygan	-Lublin	24,98
Adam Stadler	-Rzeszów	24,94
Zbigniew Kryłow	-Sopot	24,93
Henryk Mikołajczyk	-Wałbrzych	1-24,81
Marek Karaś	-Tarnów	24,50
Jerzy Mikuta	-Zielona Góra	2-24,46
Tomasz Masłowski	-Toruń	24,40
Krzysztof Trautman	-Warszawa	1-24,31
Andrzej Bonk	-Chełmża	3-23,95
Adam Wyrwa	-Nowy Wiśnicz	1-23,43
Lech Bartłomiejczyk	-Gliwice	22,50
Wojciech Skut	-Warszawa	22,43
Tomasz Szymczyk	-Bielsko-Biała	1-21,83
Mariusz Zając	-Pruszków	21,54
Małgorzata Czerniakowska	-Gdańsk	1-20,54

Legenda (przykładowo): stan konta 6-41,95 oznacza, że uczestnik już sześciokrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (siódmej) rundzie ma 41,95 p.

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników, którzy zgromadzili co najmniej 20 punktów. Pozostali członkowie **Klubu 44 M** (alfabetycznie) (cyfra w nawiasie wskazuje, ile razy uczestnik przekroczył barierę 44 punktów):

Z. Bartold (2), T. Biegański (1), W. Boratyński (1), J. Ciach (2), M. Fiszer (1), K. Hryniewiecki (1), K. Jachacy (1), K. Jedziniak (2), T. Józefczyk (2), P. Kamiński (5), H. Kasprzak (2), Z. Koza (2), P. Kumor (2), D. Kurpiel (2), R. Latała (1), J. Mańdziuk (1), M. Marczak (1), M. Mazur (3), R. Mazurek (1), M. Mikucki (1), J. Milczarek (1), R. Mitraszewski (1), W. Olszewski (1), A. Pawłowski (4), M. Prauza (2), A. Ruszel (1), S. Solecki (2), D. Sowizdrzał (3), Z. Surduka (1), W. Szymczyk (1), J. Uryga (4), P. Wach (1), G. Zakrzewski (2), Z. Zaus (1).

Zadania z matematyki nr 205, 206

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

205. Dany jest trójkąt ABC wpisany w okrąg Ω. AK, BL, CM są trzema równoległymi cięciwami okręgu Ω. Punkty P, Q, R są odpowiednio rzutami prostokątnymi punktów K, L, M na proste BC, CA, AB. Udowodnić, że:
a) proste KP, LQ, MR przecinają się w punkcie leżącym na Ω;
b) punkty P, Q, R leżą na prostej równoległej do trzech danych cięciw.

206. Wyznaczyć najmniejszy wykładnik naturalny $n \geq 2$, dla którego zapis dziesiętny liczby 44^n rozpoczyna się i kończy grupą cyfr 44.

Zadanie **206** zaproponował pan Tadeusz Józefczyk z Poznania.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 10/1989

Przypominamy treść zadań:
197. Dana jest liczba pierwsza p oraz liczby całkowite a_i, b_i $(i = 1, \ldots, p-1)$, $a_i \not\equiv b_i \ (mod\ p)$. Dowieść istnienia liczb $x_i \in \{a_i, b_i\}$ takich, że $x_1 + \ldots + x_{p-1} \equiv 0 \ (mod\ p)$.
198. Rozwiązać nierówność $(x-1)^{x+1} > (x+1)^{x-1}$ przyjmując za dziedzinę funkcji $(u,v) \mapsto u^v$ zbiór $\{(u,v):\ (u>0)$ lub $(u=0 \leq v)$ lub $(u<0,\ v$ całkowite$)\}$.

197. Dla dowolnej liczby całkowitej z oznaczmy przez $r(z)$ resztę z dzielenia z przez p. Dla dowolnego niepustego zbioru $X \subset \{0,1,\ldots,p-1\}$ i dla dowolnej liczby całkowitej a przyjmijmy $r(X+a) = \{r(x+a):\ x \in X\}$
– jest to więc zbiór wszystkich możliwych reszt $(mod\ p)$ liczb postaci $x+a$, gdzie $x \in X$. Oczywiście $|r(X+a)| = |X|$ (symbolem $|\cdot|$ oznaczamy liczbę elementów zbioru).

Lemat. Dla dowolnych liczb całkowitych a, b oraz zbioru $X \subset \{0,1,\ldots,p-1\}$, $X \neq \emptyset$, zachodzi równość $|r(X+a) \cup r(X+b)| \geq |X|$.
Jeśli przy tym $a \not\equiv b\ (mod\ p)$ oraz $|X| < p$, to nierówność jest ostra.
Dowód. Oznaczmy dla wygody: $X' = r(X+a)$, $X'' = r(X+b)$. Ponieważ $|X'| = |X''| = |X|$, zatem $|X' \cup X''| \geq |X|$. Pozostaje przedyskutować, kiedy zachodzi równość. Równość w tej relacji znaczy, że zbiory X' i X'' są identyczne. Wybierzmy dowolny element $z \in X'$. Zauważmy, że $X'' = f(X')$, gdzie $f(j) = r(j+b-a)$. Jeśli więc $X' = X''$, to $f(z) \in X'$ i dalej, przez indukcję, $f^k(z) \in X'$ dla wszystkich k naturalnych (górny wskaźnik oznacza iterowanie). Wyrazy ciągu $\left(f^k(z):\ k=0,1,\ldots\right)$ przybierają nie więcej niż $|X|$ wartości. Znajdą się więc takie numery k, l, że $0 < l-k \leq |X|$, $f^k(z) = f^l(z)$. Ostatnia równość znaczy tyle, że $z + k(b-a) \equiv z + l(b-a)\ (mod\ p)$, czyli że $(b-a)(l-k) \equiv 0\ (mod\ p)$ – a więc albo $a \equiv b\ (mod\ p)$, albo $l-k=p$, skąd $|X| = p$.
Dowód tezy zadania. Rozpatrujemy zbiory

$$X_k = \left\{r(x_1+\ldots+x_k):\ x_i \in \{a_i, b_i\},\ i=1,\ldots,k\right\}$$

dla $k = 1,\ldots,p-1$. Zbiór X_1 to para $\{a_1, b_1\}$; tak więc $|X_1| = 2$. Zbiór X_k powstaje ze zbioru X_{k-1} następująco:

$$X_k = \left\{r(z+x_k):\ z \in X_{k-1},\ x_k \in \{a_k, b_k\}\right\} = r(X_{k-1}+a_k) \cup r(X_{k-1}+b_k).$$

Na mocy lematu mamy nierówności $2 = |X_1| \leq |X_2| \leq \ldots \leq |X_{p-1}|$,
przy czym jeśli $|X_{k-1}| < p$, to zachodzi ostra nierówność $|X_{k-1}| < |X_k|$. Stąd przez łatwą indukcję $|X_k| \geq \min(p, k+1)$. Dla $k = p-1$ daje to: $|X_{p-1}| \geq p$. Zatem X_{p-1} jest całym zbiorem $\{0,1,\ldots,p-1\}$; w szczególności $0 \in X_{p-1}$. A to jest właśnie dowodzona teza.

198. W myśl przyjętej umowy, aby obie strony miały sens, musimy przyjąć, że **1°** $x > 1$, lub **2°** x jest liczbą całkowitą ≤ 1, różną od -1.
Rozważymy kolejno oba przypadki.
1° $x \in (1;\infty)$. Nierówność jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy $f(x) < 0$, gdzie

$$f(x) = \ln\frac{(x+1)^{x-1}}{(x-1)^{x+1}} = (x-1)\ln(x+1) - (x+1)\ln(x-1).$$

Różniczkujemy:

$$f'(x) = \ln(x+1) + \frac{x-1}{x+1} - \ln(x-1) - \frac{x+1}{x-1} = \ln t + \frac{1}{t} - t =: g(t),$$

gdzie $t = (x+1)/(x-1)$ przebiega przedział $(1;\infty)$.
Ponieważ $g'(t) = -t^{-2}(t^2-t+1) < 0$, $g(1) = 0$, zatem $g(t) < 0$ dla $t \in (1;\infty)$, skąd $f'(x) < 0$ dla $x \in (1;\infty)$. Przy tym $f(3) = 0$. Wobec tego $f(x) < 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x > 3$.
2° Ten przypadek rozbijamy na podprzypadki:
2.0° $x = 0$ lub $x = 1$; żadna z tych liczb nie spełnia danej nierówności.
2.1° $x = -2k-1$, $k \in \mathbf{N} = \{1,2,3,\ldots\}$. Nierówność przybiera postać $(2k+2)^{-2k} > (2k)^{-2k-2}$, czyli równoważnie: $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k < 2k$, co jest prawdą dla $k \geq 2$.
2.2° $x = -2k$, $k \in \mathbf{N}$. Nierówność przybiera postać $-(2k+1)^{-2k+1} > -(2k-1)^{-2k-1}$, czyli równoważnie: $(2k+1)^{2k-1} > (2k-1)^{2k+1}$. Jesteśmy w sytuacji z przypadku **1°**, z x zastąpionym przez $2k$ i z odwróconym zwrotem nierówności. Zgodnie z konkluzją przypadku **1°** ta nierówność będzie spełniona, gdy $2k < 3$, czyli tylko dla $k = 1$.
Reasumując: Zbiór rozwiązań rozważanej nierówności ma postać:

$$(3;\infty) \cup \{-2\} \cup \{-5,-7,-9\ldots\}.$$

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Regulamin

1. Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego oraz Redakcja miesięcznika *Delta* organizują konkurs – ligę zadaniową pod nazwą **Klub 44**.

2. Zadania konkursowe są ogłaszane w miesięczniku *Delta*, po cztery zadania w każdym numerze: dwa z matematyki i dwa z fizyki, z dwumiesięczną przerwą (nr 6 i 7 każdego roku).

3. Uczestnikiem ligi może być każdy.

4. Uczestnictwo w lidze polega na rozwiązywaniu zadań konkursowych i przysyłaniu opracowanych rozwiązań do redakcji *Delty*. Uczestnikiem zostaje się po przysłaniu rozwiązania co najmniej jednego zadania.

5. Moment przystąpienia do ligi można wybrać dowolnie. Nie ma konieczności rozwiązywania zadań z każdego miesiąca.

6. Rozwiązania zadań z numeru n należy nadsyłać do końca miesiąca $n+3$ (dodawanie modulo 12; na przykład termin nadsyłania rozwiązań zadań z numeru 11/1989 upływa 28 lutego 1990). W numerze $n+4$ podane są szkicowe rozwiązania.

7. Rozwiązanie każdego zadania powinno być pisane na oddzielnym arkuszu papieru oraz podpisane imieniem i nazwiskiem. Uczniowie proszeni są o podanie klasy, studenci – roku i uczelni. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, z dopiskiem na kopercie: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**.

8. Prace powinny być samodzielne. Jednobrzmiące rozwiązania pisane przez różnych uczestników nie będą brane pod uwagę.

9. Rozwiązanie każdego zadania jest ocenione w skali od 0 do 1, z dokładnością do 0,1. Przy ocenie brana jest pod uwagę nie tylko poprawność merytoryczna i rachunkowa, lecz także pomysłowość metody i elegancja rozwiązania.

10. Każde zadanie otrzymuje współczynnik trudności ustalany po wystawieniu ocen. Współczynnik ten jest liczbą pomiędzy 1 a 4 obliczaną według następującej reguły: jeśli N oznacza liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (matematyka lub fizyka), a S oznacza sumę ocen uzyskanych przez wszystkich uczestników za dane zadanie, wówczas otrzymuje ono współczynnik trudności $WT = 4 - 3S/N$. Za nadesłane rozwiązanie uczestnik otrzymuje w punktacji ligowej liczbę punktów równą iloczynowi uzyskanej oceny przez współczynnik trudności (z zaokrągleniem do dwóch miejsc po przecinku).

11. Niektóre z zadań można znaleźć (w brzmieniu identycznym lub bardzo zbliżonym) wraz z rozwiązaniami w różnych książkach i czasopismach. Uczestnicy, którzy w takich przypadkach przyślą zamiast własnego rozwiązania dokładny odsyłacz do literatury, otrzymają ocenę maksymalną, pod warunkiem, że w cytowanym źródle istotnie znajduje się pełne rozwiązanie (dowód, obliczenie, konstrukcja).

12. Czytelnicy *Delty* mogą zgłaszać propozycje zadań; jeśli zadanie nie jest własnego autorstwa, należy podawać źródło. Gdy zadanie wykorzystane w lidze pochodzi z propozycji uczestnika ligi (tj. osoby, która przysłała już rozwiązanie jakiegoś zadania – por. p. 4), a dostarczone zostało wraz z rozwiązaniem (choćby szkicowym, ale poprawnym, ewentualnie odsyłaczem do literatury), uczestnik otrzymuje ocenę maksymalną.

13. Punkty zdobyte przez każdego uczestnika za rozwiązania poszczególnych zadań, obliczone według reguły podanej w p. 10, są sumowane – oddzielnie dla matematyki i dla fizyki. Z chwilą osiągnięcia sumy 44 punktów w jednej z tych dwóch dziedzin uczestnik staje się członkiem **Klubu 44**.

14. Po zgromadzeniu 44 punktów (i zostaniu członkiem **Klubu 44**) można w dalszym ciągu brać udział w konkursie ligowym. Nadwyżka punktów ponad wartość 44 zostaje zaliczona na poczet ponownego uczestnictwa w lidze.

15. Trzykrotne uzyskanie członkostwa **Klubu 44** daje tytuł **Weterana Klubu 44**.

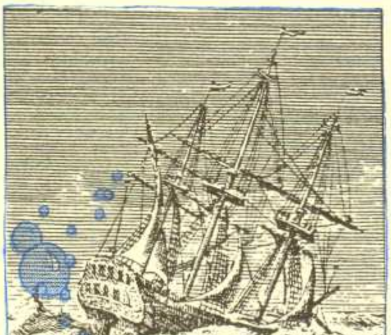
16. Aby uzyskać informacje o swoich wynikach, należy przysłać do redakcji *Delty* kartkę pocztową (oddzielną dla matematyki i dla fizyki), ofrankowaną i zaadresowaną do siebie, ze sporządzoną tabelką z umieszczonymi w jej rubrykach numerami zadań i z pustymi okienkami do wpisania ocen. Zaleca się przysyłanie takich kartek nie częściej niż co kilka miesięcy, gdy uzbiera się materiał dotyczący rozwiązań kilkunastu zadań.

17. Czołówka listy ligowej jest systematycznie ogłaszana w miesięczniku *Delta*. Nazwisko uczestnika może być wymienione w czołówce z nie zmienioną sumą punktów co najwyżej trzykrotnie; następny raz ukaże się wtedy, gdy wykona ruch w górę.

18. Raz do roku, w numerze lutowym, drukowane jest omówienie przebiegu konkursu, prezentowane są w skrócie ciekawsze rozwiązania i uogólnienia oraz ogłaszana jest obszerna czołówka (kilkadziesiąt nazwisk).

19. Członkowie **Klubu 44** są zapraszani na coroczne spotkania **Klubu 44**.

20. Organizatorzy zastrzegają sobie wyłączne prawo interpretacji i możność zmian regulaminu.



Zwierzył nam się ktoś z Czytelników, że co roku biorąc do ręki numer *Delty* z omówieniem kolejnego sezonu ligi zadaniowej i towarzyszącym mu regulaminem tejże ligi, podanym w pełnym brzmieniu – patrzy z zaciekawieniem: jakie też zmiany w kolejnym regulaminie wyłowi. Tym razem nie znajdzie wiele: zmiana dotyczy terminów, i podyktowało ją życie: zadania z numeru n rozwiązujemy do końca miesiąca $n+3$, a nie $n+2$, jak było do niedawna.

Gdy liga zaczynała żywot, formuła $n \mapsto n+2$ gwarantowała co najmniej jeden miesiąc na myślenie nad zadaniami, i taka właśnie zasada była nam aksjomatem wyjściowym. Potem przyszła pamiętna zima 81/82 i poważniejsze zmartwienia. Nie było jasne, czy *Delta*, a wraz z nią setka innych czasopism, ujrzy jeszcze światło dzienne. Gdy w czerwcu zezwolono na druk tekstów złożonych jeszcze przed grudniem i ukazały się kolejne numery *Delty*, uczestnicy ligi stwierdzili z niejakim zdziwieniem, że podanych terminów jako żywo dotrzymać nie mogą. („Ludzie! – pisał nasz Czytelnik – miejcież świadomość, że nawet w stanie wojennym strzała czasu biegnie od września do października, a nie odwrotnie!") Otóż aktualne (lato '89), niby nie–wojenne, warunki drukowania czasopism znów sprowokowały taniec na osi czasu. Lokalny rekord pobiła „trójka" (3/1989) ukazując się w kioskach z końcem maja. „Sprinterzy" zrobili zadania w trzy dni; inni przysyłali rozwiązania jeszcze przez następny miesiąc licząc na nasz zdrowy rozsądek. No cóż; zostały te rozwiązania przyjęte i ocenione, a „$n+2$" przeszło na „$n+3$".

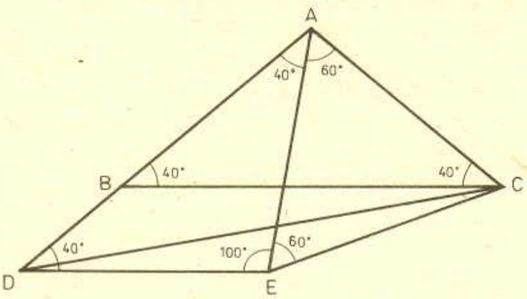
Rok 1990 jest dla *Delty* jeszcze bardziej nietypowy od innych, zdawałoby się tak burzliwych, lat. Byliśmy zawieszeni, „wypadło" kilka numerów i, oczywiście, ma to swoje odbicie w przebiegu zmagań ligowych. W bieżącym roku przerwa ligowa będzie, nie tak jak każe Regulamin, w listopadzie i grudniu. Ze względu na „krótszy" rok w roczniku 1991 nie będzie omówienia. Nie jesteśmy też w stanie powiedzieć, czy wywiążemy się z dziewiętnastego punktu Regulaminu. Mamy jednak nadzieję, że kiedyś, również w *Delcie*, nastąpi spokój i będzie się przestrzegać wszelkich regulaminów i terminów.

Redakcja *Delty* przeprasza za to, że w roku 1989, ze względu na trudności finansowe, nie zorganizowała spotkania Członków Klubu 44.

Przechodzimy teraz do zadań z sezonu 88/89: kto zrobił je zgrabniej od nas, kto uogólnił lub interesująco skomentował; które zadania okazały się najtrudniejsze ($WT > 3$). Widać wyraźnie (z tego, jak i z zeszłorocznego omówienia), że klasą dla siebie wśród uczestników jest pan **Henryk Kasprzak** z Żar.

Zadanie 173 [Konstrukcja rozbieżnego szeregu $\sum \varepsilon_n n^{-1}$, gdzie $\varepsilon_n = \pm 1$, $\lim(\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n)n^{-1} = 0$] (współczynnik trudności $WT = 3,09$; liczba poprawnych rozwiązań $LPR = 14$). Prawie wszystkie rozwiązania polegają na modyfikacji szeregu anharmonicznego na ciągu numerów o zerowej gęstości, wykorzystując przy tym rozbieżność szeregu $\sum (n \ln n)^{-1}$. Autorami poprawnych rozwiązań byli: **A. Bonk, H. Kasprzak, H. Kornacki, P. Kumor, A. Langer, M. Mazur, K. Pióro, A. Przeździecki, A. Szymczak, K. Parol, M. Zając, K. Zawisławski, R. Latała, Z. Surduka.**

Zadanie 175 [Rysunek 1: $|\angle ABC| = |\angle BCA| = 40°$, $|AD| = |BC|$; $|\angle ADC| = ?$] ($WT = 1,65$; $LPR = 26$). Większość rozwiązań, w tym i nasze, sprowadza się do mniej lub bardziej zgrabnych rachunków trygonometrycznych (nasze – raczej mniej...). Zwracają więc uwagę ładne rozwiązania geometryczne (**K. Burnicka** i **H. Kasprzak**; a dość podobnie **P. Jędrzejewicz, D. Rybacki**): Budujemy trójkąt EAD przystający do ABC (rysunek 1); powstaje trójkąt równoboczny AEC oraz trójkąt równoramienny ECD, w którym $|\angle CED| = 160°$; zatem $|\angle EDC| = 10°$, skąd $|\angle ADC| = 30°$.



Rys. 1

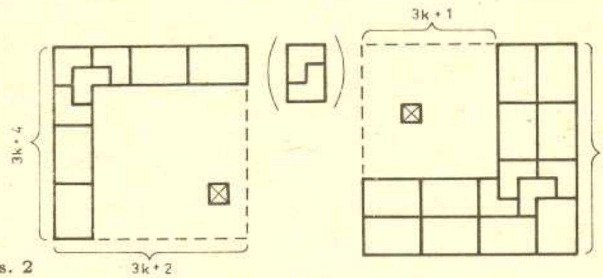
Zadanie 176 [Dowieść: $\left(x^2 + x + \frac{n}{2}\right)^n > \frac{1}{2}\left(x^{2n} + (x+1)^{2n}\right)$, $n \in \mathrm{N}$, $n > 1$, $x \in \mathbf{R}$] ($WT = 3,09$; $LPR = 10$). **A. Bonk. H. Kasprzak, H. Kornacki, K. Surduka, G. Zakrzewski, M. Zając** – rozwiązania nie różniące się istotnie od naszego; **D. Rybacki** – podobnie; **R. Latała** – indukcyjnie; **P. Kumor, K. Pióro** – dowody analityczne, dość zawiłe.

Zadanie 177 [$f(f(x) + y) = f(x + y) + 1$; $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ściśle rosnąca; wyznaczyć f] ($WT = 1,47$; $LPR = 33$). **H. Kasprzak** podaje uwagi dotyczące rozwiązań danego równania funkcyjnego *bez założenia różnowartościowości*: Jeżeli $f(x) \not\equiv x + 1$ spełnia równanie, to jest funkcją okresową, nieograniczoną, $f(\mathbf{R}) \neq \mathbf{R}$; rozwiązania takie istnieją (przy założeniu pewnika wyboru).

Zadanie 178 [sup $\sum$ (długości cięciw wyznaczonych przez n punktów okręgu jednostkowego) = ?] ($WT = 3,18$; $LPR = 10$). Kres ten jest osiągany, gdy punkty są rozmieszczone równomiernie; dowody opierają się w większości na nierówności Jensena dla funkcji sinus. **A. Bonk, P. Jędrzejewicz, H. Kasprzak, A. Langer, M. Zając, G. Zakrzewski, P. Kumor, R. Latała, W. Skut, M. Karaś.**

Zadanie 179 [$x, y \geq 0$; $\left(\frac{1}{3}\left(x + (xy)^{1/2} + y\right)\right)^{1/3} = \left(\frac{1}{2}\left(x^{2/3} + y^{2/3}\right)\right)^{1/2} \Rightarrow x = y$] ($WT = 2,58$; $LPR = 23$). Eleganckie rozwiązanie **H. Kasprzaka**: Podstawienie $x/y = e^{6t}$ prowadzi do równania $f(t) = 0$, gdzie $f(t) = \cosh 6t - 16 \cosh 3t + 27 \cosh 2t - 12$. Sprawdzamy, że $f^{(k)}(0) = 0$ dla $k = 0, 1, 2, 3$ oraz $f^{(4)}(t) > 0$ dla $t \neq 0$. Na mocy wzoru Taylora $f(t) > 0$ dla $t \neq 0$. Zatem: $f(t) = 0 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow x = y$.

Zadanie 180 [Szachownicę $m \times m$ (gdzie $m = 2^n$) bez jednego pola da się pokryć kostkami „trimino"] ($WT = 1,60$; $LPR = 35$). Teza jest słuszna także dla wielu innych liczb naturalnych m (niekoniecznie postaci 2^n). Niech M będzie zbiorem wszystkich tych liczb. Zachodzą implikacje: $3k + 2 \in M \Rightarrow 3k + 4 \in M$; $3k + 1 \in M \Rightarrow 3k + 5 \in M$. Tę uwagę wraz z prostym dowodem (rysunek 2) przekazał nam prof. dr hab. **Jerzy Browkin** (U.W.). Ponieważ $\forall k : 3k \notin M$ oraz $1 \notin M$, $2 \in M$, $5 \notin M$, $7 \in M$ (sprawdzenie łatwe), wynika stąd, że $M = \{m \in \mathrm{N} : 3 \nmid m\} - \{1, 5\}$.



Rys. 2

Zadanie 182 [Rozbijanie ciągu $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8} \ldots\right)$ na podciągi o zadanych sumach] ($WT = 2,01$; $LPR = 18$). Treść zadania była sformułowana nieprecyzyjnie. Nie było jasne, czy do rozważań dopuszcza się ciągi długości skończonej (ewentualnie wręcz puste), czy nie, a od tego zależała odpowiedź. Nasza wina – przepraszamy. Oczywiście, akceptowaliśmy wszystkie rozwiązania, które były poprawne przy którymkolwiek rozumieniu treści.

Zadanie 183 [Sześciokąt wypukły o polu $> \frac{2}{3} \cdot$ kwadrat średnicy] ($WT = 3,27$; $LPR = 5$). Istnienie takiego sześciokąta było nieco zaskakujące, zważywszy, że sześciokąt foremny nie jest tu dobry. Prawidłową konstrukcję, identyczną lub bardzo zbliżoną do naszej, podali: **H. Kasprzak, L. Krawczyk, P. Kumor, K. Surduka, K. Jedziniak.**

Zadanie 186 [Warunek konieczny i dostateczny istnienia czworościanu o zadanych polach ścian] ($WT = 2,65$; $LPR = 4$). Już się zaczęły duże opóźnienia numerów powodując spadek liczby uczestników. Stąd niezbyt wysoki WT, jak na zadanie o tej trudności. Rozwiązania nie różniące się istotnie od naszego przysłali: **H. Kasprzak, L. Krawczyk, R. Latała.** Interesujące rozwiązanie (z usterkami, na szczęście usuwalnymi) oparte na rachunku wektorowym podał **A. Kondracki.**

Zadanie 190 [$m, n \in \mathrm{N}$, m nieparzyste $\Rightarrow NWD(2^m - 1, 2^n + 1) = 1$] ($WT = 2,25$; $LPR = 15$). Nietrudne, a poza tym, jak się okazuje znane. **J. Ciach** proponuje wobec tego dalszy ciąg: zauważa, że teza przestaje być prawdziwa, gdy m jest liczbą parzystą, a n nieparzystą (bo wówczas $1 + 2^{NWD(m,n)}$ jest wspólnym dzielnikiem liczb $2^m - 1$, $2^n + 1$) i stawia problem charakteryzacji tych par liczb parzystych m, n, na które teza zadania się przenosi. Przekazujemy problem naszym Czytelnikom.

W lidze fizycznej, poczynają od numeru 9/1989, niektóre zadania są przewidziane do rozwiązania metodami numerycznymi. Z pomocą rządowego programu badawczego-rozwojowego RR I.14 jako sponsora postanowiliśmy zająć się popularyzacją tych metod, które we współczesnej fizyce odgrywają coraz większą rolę.

Komputerów też mamy coraz więcej – w szkołach, uczelniach, zakładach pracy, klubach, a także w domach. Zachęcamy więc do spróbowania... Jeśli ktoś nie ma dostępu do komputera, może te zadania rozwiązywać (może trochę mniej dokładnie) np. posługując się kalkulatorem z funkcjami.

Za wszelkie uwagi Czytelników na temat tych zadań, ale również i pozostałych, będziemy bardzo wdzięczni. A teraz omówienie wybranych zadań z minionego roku.

Zadanie 71 [Przepłynięcie rzeki] ($WT = 2,01$; $LPR = 21$). Większość rozwiązujących przyjęła znany stosunek prędkości pływaka i wody i przy takim założeniu minimalizowała odległość zniesienia pływaka przez nurt rzeki. Widać nie wczuli się oni w sytuację człowieka, który musi skakać do wody nie znając szybkości nurtu. A był to właśnie ważny element zadania. Najładniejsze rozwiązania przysłali **G. Buchcic, T. Rusin, P. Wójtowicz, A. Borowski, W. Kacprzak, W. Peisert, A. Sikorski** i **A. Wroński.** Posłużono się w nich trygonometrią. Jeśli nawet zamieszczono rysunki takie, jak w rozwiązaniu opublikowanym w *Delcie* (nr 12/1988), miały one charakter tylko ilustracyjny.

Zadanie 73 [Kula zsuwająca się ze stołu] ($WT = 1,88$; $LPR = 11$). Większość nadesłanych rozwiązań była poprawna. Najlepsze rozwiązania przysłali **P. Bała**, **R. Musiał**, **A. Sikorski**, **P. Wójtowicz**. Za to do rozwiązania w numerze 1/1989 *Delty* zakradł się błąd: powinno być $\alpha_0 = \arccos(2/3)$ oraz $Z = (4\sqrt{3}/9)\sqrt{RH}$.

Zadanie 75 [Równia pochyła ze zmiennym współczynnikiem tarcia] ($WT = 1,46$, $LPR = 25$). Większość rozwiązujących (m. in. **M. Krystian**, **P. Jungiewicz**, **G. Lewandowski**, **P. Perkowski**, **A. Sikorski**) zastosowała metodę „energetyczną" – podobnie jak w *Delcie*. Kilka osób (**A. Bonk**, **A. Gluza**, **R. Musiał**) rozwiązywało równanie ruchu klocka. **J. Lipkowski** i **Dz. Lipniacki** wykorzystali obydwie metody.

Zadanie 77 [Strumień wody ze strzykawki] ($WT = 2,50$; $LPR = 15$). Jedynie **A. Kondracki** opisał prawidłowo wpływ dyszki na zjawisko wypływu wody.

Zadanie 79 [Połączenie żarówek w żyrandolu] ($WT = 1,27$; $LPR = 18$). Zadanie to wypadło dobrze (najniższa wartość WT). Tylko niektórzy autorzy poprawnych rozwiązań (**A. Borowski** – sprawdził doświadczalnie, **J. Lipkowski**, **B. Mikielewicz**, **R. Musiał**, **A. Sikorski**) wspomnieli o zależności oporu żarników od temperatury.

Zadanie 81 [Wyznaczanie stężenia kwasu] ($WT = 1,65$; $LPR = 19$). **W. Peisert** i **Dz. Lipniacki** przedyskutowali wpływ bezwładności cieczy na ruch pływaka (**Dz. Lipniacki** wykonał doświadczenie). **A. Sikorski** zwrócił uwagę na to, że zależność gęstości kwasu od stężenia nie jest ściśle liniowa. W rozwiązaniach występują różne określenia stężenia; większość osób brała stosunek masy kwasu do masy roztworu.

Zadanie 82 [Światło przechodzące przez szklany półwalec] ($WT = 2,47$; $LPR = 10$). W niektórych rozwiązaniach (**A. Sikorskiego**, **T. Wietechy**, **J. Lipkowskiego**, **B. Musiała**, **R. Musiała**) podano wyrażenia określające stosunek powierzchni bocznej, z jakiej światło wychodzi, do całej powierzchni bocznej półwalca, jako funkcję współczynnika załamania. **T. Wietecha** dołączył nawet program komputerowy sporządzający wykres tej funkcji.

Zadanie 83 [Napełnianie dziurawej beczki] ($WT = 2,40$; $LPR = 10$). Dobre rozwiązania nadesłali **T. Wietecha**, **P. Bała**, **A. Borowski**, **P. Jungiewicz**, **B. Mikielewicz**, **B. Musiał**, **P. Gworys**, **J. Lipkowski**, **L. Motyka** i **A. Sikorski**. **A. Gluza** zauważyła, że identyczne zadanie było już w *Delcie* (nr 1/1976, zad. F 25). Niestety, zamieszczone tam rozwiązanie jest obarczone błędem rachunkowym i prowadzi do mylnego wyniku.

Zadanie 84 [Rzut piłką ponad ścianą] ($WT = 3,00$; $LPR = 8$). Zadanie to miało najwyższy współczynnik trudności. Spośród autorów dobrych rozwiązań (**P. Bała**, **J. Lipkowski**, **Dz. Lipniacki**, **A. Borowski**, **B. Musiał**, **A. Sikorski**, **T. Wietecha**, **L. Motyka**) nikt nie zauważył występowania drugiego „obszaru cienia" w większej odległości od ściany.

Zadanie 85 [Kondensator na sprężynkach] ($WT = 1,87$, $LPR = 13$). W większości rozwiązań przyrównano energię naładowanego kondensatora $E_k = \frac{S\varepsilon}{d_0}\frac{U^2}{2}$ (ε – przenikalność elektryczna powietrza) do energii rozciągniętych sprężynek $E_s = 4k\frac{d_0^2}{2}$. Najlepsze rozwiązania tego typu przysłali **M. Karaś**, **A. Borowski**, **B. Mikielewicz** i **P. Perkowski**.

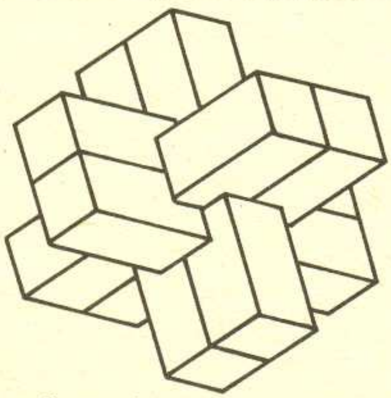
Zadanie 87 [Obrót kosmonauty] ($WT = 2,27$, $LPR = 8$). Autorzy prawidłowych rozwiązań (**K. Osipowicz**, **P. Bała** **L. Motyka**, **W. Peisert**, **A. Sikorski**, **R. Wencel**, **A. Borowski**, **A. Surma**) na ogół proponują okrężne ruchy rękoma.

Zadanie 89 [Zawieszanie szafki] ($WT = 2,48$, $LPR = 7$). Zaledwie 7 dobrych rozwiązań (**Zb. Kapały**, **A. Sikorskiego**, **Dz. Lipniackiego**, **R. Musiała**, **M. Karasia**, **J. Lipkowskiego**, **A. Wrońskiego**) wiąże się z małą liczbą nadesłanych prac, na co miało wpływ poważne opóźnienie się majowego numeru *Delty*.

Krzyżak

Litewscy i łotewscy drwale w chwilach wolnych od pracy wycinali z drewienek sześć patyczków takich jak na rysunku obok, a następnie dawali je dzieciom, by te złożyły z nich nierozpadający się krzyżak. A nie jest to łatwe. Proszę samemu wyciąć i złożyć.

Potem podobną zabawkę (wykonaną z plastyku) sprzedawano u nas w kioskach Ruchu. Kiedy porównaliśmy oryginalną drewnianą zabawkę z jej plastykowym odpowiednikiem, okazało się, że nie są one jednakowe. Różnią się kształtem dwóch patyczków. Powstaje zatem pytanie, czy istnieje może jeszcze więcej wersji?



Dokładniej: na ile sposobów można wyciąć 6 patyczków w taki sposób, by można z nich było złożyć nierozpadający się krzyżak nie mający luk we wnętrzu?

Opracował M. K.

Propozycje ewentualnych tematów prac na Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki zamieszczamy od numeru 3/1988 (z pominięciem numerów 6 i 12 z 1988 roku oraz 1, 6, 7 i 8 z roku 1989). Oczywiście, chętnie widzimy prace również na inne tematy.