Prawa fizyki a ciężkie życie krasnoludków

Paweł BŁASIAK

Kiedy byłem małym chłopcem, bardzo lubiłem opowiadania o krasnoludkach. Nie mogłem zgodzić się z tym, że dorośli nieustannie leniuchują, a krasnale muszą za nich pracować. Bardzo mi było żal sympatycznych i niezwykle pracowitych ludzików. Dopiero w szkole zrozumiałem, że wszystkiemu winne są prawa fizyki.

Wszystkie dzieci wierzą, że krasnoludki chętnie zjadają pożywienie wystawiane im na noc przez dobrych ludzi. Podobno w każdej bajce jest odrobina prawdy. W niniejszym artykule przedstawimy naukowe argumenty na temat legendarnej żarłoczności małych ludzików.

Załóżmy na początku, że krasnoludki są istotami ciepłokrwistymi (zimnokrwiste krasnale, podobne do żab, nie mogłyby przecież pozyskać sympatii małych dzieci). Rozważmy bilans energetyczny istot ciepłokrwistych. Energia dostarczona organizmowi w formie pożywienia jest przeznaczona na podtrzymanie pracy różnych narządów wewnętrznych (np. pracy serca, płuc), na wykonanie pracy mechanicznej oraz na utrzymanie stałej temperatury ciała. Badania biofizyków wykazały, że prawie cała energia dostarczona człowiekowi jest przeznaczona na utrzymanie ciepłokrwistości (kaprys natury czy konieczność? – spróbujcie sami odpowiedzieć na to pytanie). W temperaturze 20°C około 31% ogólnej ilości pozyskanej energii cieplnej jest tracone w drodze konwekcji (unoszone przez będące w ruchu powietrze), 44% ciepła organizm wypromieniowuje do otoczenia, 22% jest zużywane na parowanie z powierzchni skóry.

W prostym i bardzo przybliżonym modelu równowagi energetycznej organizmu założymy, że energia pobrana przez organizm wraz z pożywieniem (E_{pob}) jest w całości tracona w formie promieniowania (E_{wypr}).

(1) $$E_{pob} = E_{wypr}\,.$$

Niech P oznacza energię (pobieraną lub traconą) w jednostce czasu (czyli moc organizmu wyrażoną w kaloriach na dobę lub J/s). Mamy więc

(2) $$P_{pob} = P_{wypr}\,.$$

Zapotrzebowanie na energię zależy od masy organizmu

(3) $$P_{pob} = Z \cdot m\,,$$

gdzie m jest masą organizmu, a Z współczynnikiem proporcjonalności (Z może być w ogólności także zależne od masy ciała). Współczynnik Z oznacza ilość energii pobranej przez organizm w jednostce czasu przypadającą na jednostkę jego masy. Będziemy go dalej nazywać **żarłocznością właściwą** organizmu.

Spróbujemy teraz odpowiedzieć na pytanie: jak żarłoczność właściwa zależy od rozmiarów organizmu? Dla uproszczenia rozważań załóżmy, że organizm ma kształt kuli. Wówczas

(4) $$P_{pob} = Z(r) \cdot 4\pi r^3 \rho/3\,,$$

gdzie: r – promień kuli, ρ – średnia gęstość organizmu.

Ciało o powierzchni S i temperaturze T, znajdujące się w środowisku o temperaturze T_0 ($T > T_0$), wypromieniowuje w jednostce czasu energię zgodnie ze wzorem

(5) $$P_{wypr} = \alpha S \Delta T\,.$$

Jeśli $\Delta T \ll T$, to współczynnik proporcjonalności α jest proporcjonalny do T^3. (Wynika to z prawa promieniowania Stefana-Boltzmanna, $P = \sigma(T^4 - T_0^4) = \sigma S(T^2 + T_0^2) \cdot (T + T_0) \cdot (T - T_0) = 4\sigma T^3 \cdot S \cdot \Delta T$ dla $T \approx T_0$.) W temperaturze pokojowej $\alpha \approx 2 \div 5$ W/(m^{2}K) (w zależności od rodzaju powierzchni ciała). Dla ciała kulistego

(6) $$P_{wypr} = \alpha 4\pi r^2 \Delta T\,.$$

Podstawiając (4) i (6) do (2) mamy

(7) $$Z(r) 4\pi r^3 \rho/3 = \alpha 4\pi r^2 \Delta T\,,$$

a stąd interesująca nas żarłoczność właściwa organizmu

(8) $$Z(r) = (3\alpha/\rho)(\Delta T/r)\,,$$

czyli

(9) $$Z(r) \sim \frac{1}{r}\Delta T\,.$$

Rozwiązanie zadania M 567. Spośród wszystkich par (l, X), gdzie l jest prostą przechodzącą przez co najmniej dwa punkty zbioru, a X punktem zbioru nie należącym do l, wybierzmy taką, dla której odległość z X do l jest najmniejsza. Przypuśćmy, że na l leżą trzy punkty zbioru A, B, C (w tej kolejności). Wówczas rzut prostopadły punktu X na l nie należy do którejś z dwu półprostych, na które prostą l dzieli punkt B. Przypuśćmy, że nie należy do półprostej zawierającej punkt A. Wtedy kąt ABX jest rozwarty lub prosty, stąd w trójkącie ABX bok AX jest najdłuższy. Ponieważ w każdym trójkącie iloczyn: bok · wysokość nań opuszczona jest stały, prowadzi to do wniosku, że odległość punktu B od prostej przechodzącej przez punkty A i X jest mniejsza od odległości X od l. Sprzeczność!

Dla stałej różnicy temperatur (ciała i otoczenia) żarłoczność właściwa jest hiperboliczną funkcją rozmiaru organizmu (promienia). Im organizm jest większy, tym mniej musi spożywać pożywienia na jednostkę swojej masy, natomiast małe organizmy cechuje duża żarłoczność właściwa.

Nasze wnioski potwierdzają się w przyrodzie. Np. ilość pożywienia przypadająca na 1 kg masy słonia jest około 30 razy mniejsza niż u polnej myszki. Słoń może sobie pozwolić na dłuższą przerwę w jedzeniu, natomiast myszka musi ciągle uganiać się za pożywieniem. Myszki etruskie, ważące około 1,5 g, muszą zjadać w ciągu doby około 3 g pożywienia. Parogodzinna przerwa w jedzeniu może być dla nich zgubna.

Maleńkie kolibry żyjące w Południowej Ameryce, ważące około 2 g, są praktycznie cały czas zajęte zdobywaniem i konsumowaniem pożywienia. Dłuższą przerwę nocną na sen mogą przeżyć tylko dzięki temu, że w nocy temperatura ich ciała mocno się obniża (cóż za wspaniały wynalazek przyrody!).

Już w 1847 r. Carl Bergman zauważył, że w zimnym, surowym klimacie zwierzęta są większe niż przedstawiciele tych samych gatunków czy rodzajów, żyjących w cieplejszych stronach. Np. czaszki dzików z południowej Hiszpanii osiągają 32 cm długości, z Polski około 41 cm, z Białorusi 46 cm, natomiast na Syberii spotyka się zwierzęta o długości czaszki 56 cm.

Średnia masa ciała mieszkańców Finlandii wynosi około 70 kg, Amerykanów zamieszkujących południowe stany – 64 kg, a mieszkańców tropikalnego Wietnamu – 50 kg. Im klimat chłodniejszy, tym większa wartość ΔT we wzorze (8), a tym samym większa wartość r (przy założeniu tej samej żarłoczności właściwej).

Aby nie popaść w zbytnią zarozumiałość, należy podkreślić, że naszego prostego modelu nie należy traktować bezkrytycznie. Wiadomo bowiem, że wzrost i masa ciała ludności zamieszkującej w jakimś obszarze zależą nie tylko od warunków klimatycznych, ale także od czynników genetycznych i społeczno-ekonomicznych. Faktem jest jednak, że zwierzęta hodowane za młodu w temperaturze około +6°C wykazywały w eksperymentach laboratoryjnych znacznie większe wymiary niż ich pobratymcy hodowani w warunkach cieplarnianych. Powyższy fakt został wykorzystany w hodowli kurcząt na skalę przemysłową.

Biolodzy przytaczają w podręcznikach tzw. regułę Allena. Mówi ona o tym, że zwierzęta żyjące w krajach zimnych mają mniejszą powierzchnię ciała od ich pobratymców żyjących w krajach cieplejszych. Zwierzęta polarne mają mniejsze uszy, krótsze ogony, pysk i łapy krótsze i grubsze, a nawet krótsze szyje. Np. północny zając bielak (*Lepus timidus*) ma uszy krótsze od naszego szaraka (*Lepus europaeus*). Podręczniki zoologii pełne są przykładów potwierdzających regułę Bergmana i Allena.

Zanim przejdziemy do krasnoludków, oszacujemy żarłoczność właściwą człowieka. Człowiek o masie około 80 kg spożywa w ciągu doby około 1 kg pożywienia dającego około 12 MJ energii. Żarłoczność właściwa człowieka wynosi więc $12\,000\,000/(24 \cdot 3\,600 \cdot 80)$ J/(kg·s), czyli około 1,75 W/kg.

Teraz zajmiemy się naszym krasnoludkiem. Załóżmy, że ma on kształt prostopadłościanu o wymiarach $0,5 \times 1 \times 2$ mm. Jeśli szanowni Czytelnicy hodują inne krasnoludki, wówczas rachunki należy nieco zmodyfikować. Objętość naszego krasnala wynosi 10^{-9} m^3, a powierzchnia $7 \cdot 10^{-6}$ m^2. Moc wypromieniowaną obliczymy ze wzoru (5) zakładając, że ΔT wynosi 20°C, a $\alpha = 4$ W/(m^{2}K). Otrzymujemy wartość około $6 \cdot 10^{-4}$ W. Zakładając, że średnia gęstość ciała krasnala jest równa gęstości wody, obliczymy jego masę, a następnie żarłoczność właściwą (tak jak wcześniej zakładamy, że cała energia uzyskana w formie pożywienia jest wypromieniowana). Żarłoczność właściwa krasnoludka wyniesie więc $(6 \cdot 10^{-4}$ W$)/(10^{-6}$ kg$)$, czyli 600 W/kg.

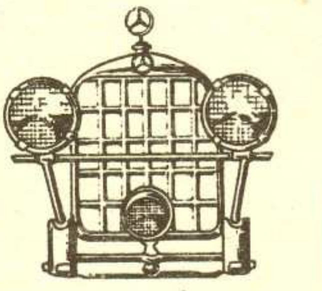
Żarłoczność właściwa naszego krasnoludka jest więc ponad 300 razy większa od żarłoczności właściwej człowieka!

Człowiek zjada w ciągu doby pożywienie o masie równej 1/80 masy swego ciała. Ponieważ żarłoczność naszego krasnala jest ponad 300 razy większa od żarłoczności człowieka, musi on zjadać w ciągu doby pożywienie o masie równej $(1/80) \cdot 300$, czyli około 4 razy większej od masy jego ciała! Jeśli krasnale są takie maleńkie, jak w bajkach i ciepłokrwiste (tak jak tego chcieliśmy), to mają ogromnie trudne życie, zwłaszcza w dobie kryzysu ekonomicznego.

Pamiętajcie więc o dokarmianiu krasnoludków.

Rozwiązanie zadania M 565.
Ustalmy liczbę naturalną N. Niech a_n oznacza moc zbioru $\{(x,w) : 0 < x, w \le N \text{ i } x^{19} + w^{17} = n\}$. Wówczas liczba rozwiązań równania (*) wynosi $\sum a_n^2$, a liczba rozwiązań równania (**) wynosi $\sum a_n \cdot a_{n+1}$. Mamy teraz

$$\sum a_n^2 - \sum a_n \cdot a_{n+1} =$$
$$= \frac{1}{2} \sum (a_n^2 - 2a_n a_{n+1} + a_{n+1}^2) \ge 0.$$



Rozwiązanie zadania M 566.
Wybierzmy się w podróż, w trakcie której odwiedzimy wszystkie lotniska (można to zrobić, bo sieć jest spójna). Ustawmy teraz lotniska w ciąg (być może z powtórzeniami) w kolejności ich odwiedzania, włączając weń te lotniska, na których dokonywaliśmy przesiadek. Wyłączymy z eksploatacji to lotnisko, które pojawi się w ciągu dopiero wtedy, kiedy wszystkie inne w nim wystąpiły. Dowolne dwa różne od niego lotniska znalazły się na trasie naszej podróży, zanim dolecieliśmy do lotniska wyłączonego, więc nie przesiadaliśmy się na nim w trakcie przelotu z jednego na drugie.