

# Modularne gwiazdki i bąbelki

Michał KWIECIŃSKI

Pierścień liczb całkowitych modulo  $m$  (oznaczany przez  $Z_m$ ) jest dobrze znany każdemu matematykowi. Pojawia się na początku większości podręczników algebry wyższej. Oto krótkie wprowadzenie dla niewtajemniczonych:

$Z_m$  możemy zdefiniować jako zbiór pierwszych  $m$  nieujemnych liczb całkowitych  $\{0, 1, 2, \dots, m-2, m-1\}$ . Liczby te możemy dodawać i mnożyć tak samo jak zwykle liczby całkowite, z tym że jeśli wynik działania przekroczy  $m-1$ , to „sprowadzamy go z powrotem” do  $Z_m$  biorąc jego resztę z dzielenia przez  $m$ . Łatwo sprawdzić, że zbiór  $Z_m$  z tak określonymi działaniami tworzy pierścień (to znaczy modularne dodawanie i odejmowanie mają własności łączności, przemienności, rozdzielności itd.).

Ładnym i często podawanym przykładem dodawania „modulo  $m$ ” jest dodawanie godzin na dwunastogodzinnym zegarze. Aby otrzymać pełną analogię z dodawaniem w  $Z_{12}$ , powinniśmy zastąpić godzinę dwunastą godziną 0. Tarcza zegara będzie dla naszych celów bardzo istotna jako punkt wyjścia do rysowania wykresów funkcji modularnych.

Funkcję modularną  $f: Z_m \rightarrow Z_m$  otrzymuje się z funkcji o argumentach i wartościach całkowitych  $F: Z \rightarrow Z$  podobnie jak modularne dodawanie i mnożenie, tzn. jeśli wartość  $F(n)$  przekroczy  $m-1$ , to zdefiniujemy  $f(n)$  jako resztę z dzielenia  $F(n)$  przez  $m$ .

Rozważmy funkcję  $n \mapsto n + 4$  w  $Z_{12}$ . Moglibyśmy narysować jej wykres używając zwykłego prostokątnego układu współrzędnych o osiach  $x, y$ . Wykres ten składałby się po prostu z dwunastu współliniowych punktów. Wprowadzimy teraz inną metodę „ilustrowania” funkcji modularnych. Rysujemy tarczę zegara (tego poprawionego: 0 zamiast 12) i łączymy odcinkami każdą godzinę  $n$  ( $n = 0, 1, \dots, 11$ ) z godziną  $n+4$  (rys. 1). Nasz „zegarowy” wykres funkcji jest gotowy.

Można ten sposób rysowania wykresów uogólnić i rysować wykresy w  $Z_m$  dla dowolnego  $m$ . Wtedy używać będziemy tarczy  $m$ -godzinowego zegara (zamiast zwykłego 12-godzinnego) jako „układu współrzędnych”. Możemy teraz przyjrzeć się wykresom różnych funkcji dla różnych wartości  $m$ . To zadanie może nam ułatwić mikrokomputer (rysunki zamieszczone w tym artykule zostały wykonane na AMSTRADZIE CPC664), lecz kartka papieru i ołówek wystarczą w zupełności.

Najpierw przyjrzyjmy się funkcjom typu  $n \mapsto n + p$ , gdzie  $p$  jest liczbą naturalną. Ten prosty wzór generuje okazałą rodzinę gwiazd. Zachęcamy Czytelnika do badania ich własności (geometria przeplata się tu z teorią liczb). Oto kilka problemów do rozwiązania:

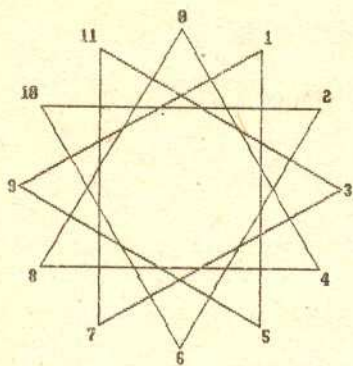
1) Kiedy dwie różne funkcje mają ten sam wykres (np.  $n \mapsto n + 2$  i  $n \mapsto n + 3$  w  $Z_5$  - Gwiazda Pitagorejska - rys. 2)?

2) Kiedy otrzymujemy gwiazdę „o obwodzie zamkniętym”, a kiedy gwiazda składa się z kilku obwodów zamkniętych? Sformułowanie: gwiazda „o obwodzie zamkniętym” nie wymaga chyba precyzyjnej definicji: jest taką np. gwiazdą  $n \mapsto n + 2$  w  $Z_5$ , zaś Gwiazda Dawida, czyli  $n \mapsto n + 2$  w  $Z_6$  taką nie jest (rys. 2, 3).

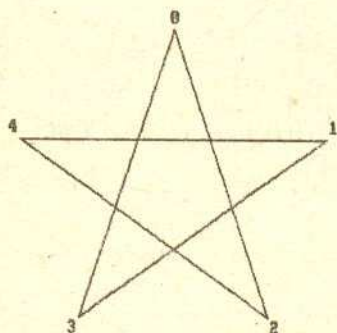
3) Ile jest „gwiazd o obwodzie zamkniętym” w  $Z_m$  dla ustalonego  $m$ ?

Badając gwiazdy zauważamy, że ich kształt zależy zarówno od  $p$ , jak i od  $m$ . Gdy przy ustalonym  $p$  będziemy zwiększać  $m$ , to wykres funkcji  $n \mapsto n + p$  będzie „zmierzał” do okręgu.

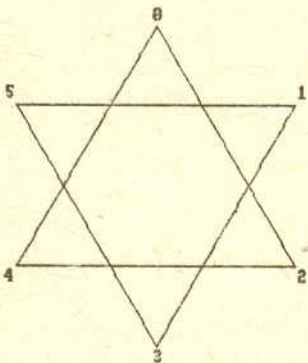
Przyjrzyjmy się teraz wykresowi funkcji  $n \mapsto 2n$  dla różnych wartości  $m$ . Dla małych  $m$  widzimy pewną regularność w tym wykresie, który gwiazdą już nie jest (rys. 4).



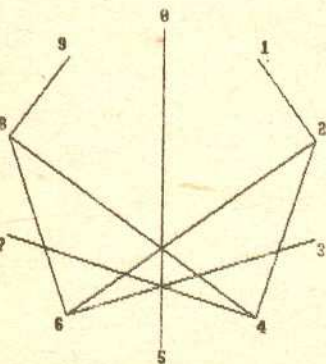
Rys. 1. Na zmodyfikowanej tarczy zegara łączymy każdą godzinę  $n$  z godziną  $n + 4$ . W ten sposób powstaje „zegarowy wykres” funkcji  $n \mapsto n + 4$  w  $Z_{12}$ .



Rys. 2. Gwiazda Pitagorejska jest zarówno wykresem funkcji  $n \mapsto n + 2$ , jak i  $n \mapsto n + 3$  w  $Z_5$ . Jest to gwiazda „o obwodzie zamkniętym”.

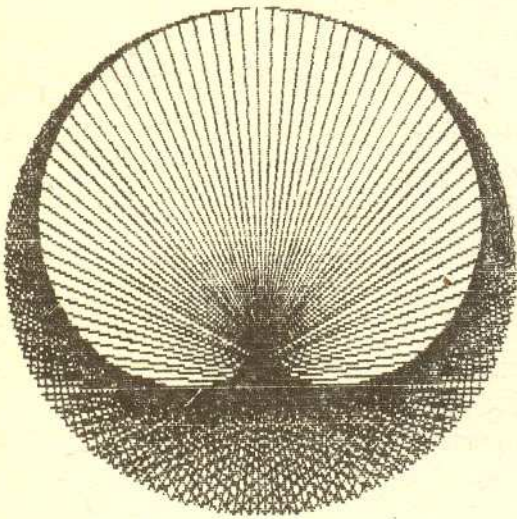


Rys. 3. Gwiazda Dawida  $n \mapsto n + 2$  w  $Z_6$  nie jest gwiazdą „o obwodzie zamkniętym”.



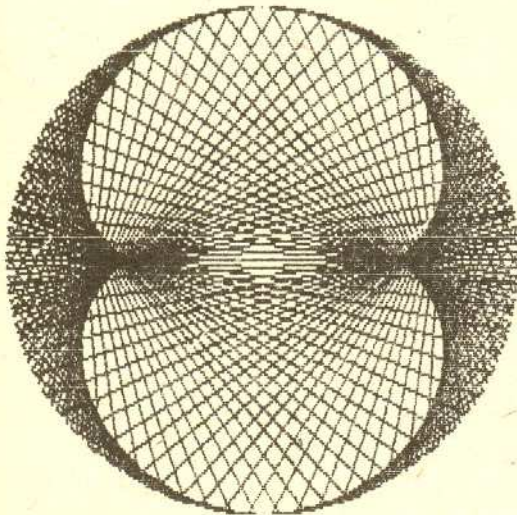
Rys. 4. Zegarowy wykres funkcji  $n \mapsto 2n$  w  $Z_{10}$ .

Gdy przechodzimy do większych  $m$ , pojawia się nam kształt bąbelka (rys. 5 ilustruje przypadek  $m = 200$ ). Kształt ten wydaje się nie zmieniać dla dalszych wartości  $m$ .



Rys. 5. Zegarowy wykres funkcji  $n \mapsto 2n$  w  $Z_{200}$ . Na wykresach tej funkcji w  $Z_m$  dla dużych  $m$  pojawia się „krzywa bąbelkowa”.

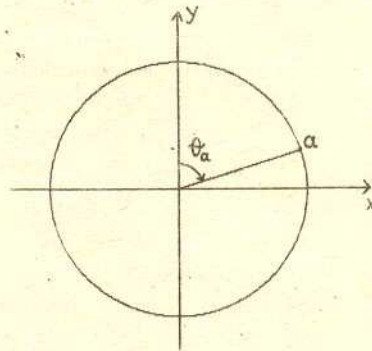
Co się będzie działo dla  $n \mapsto 3n$ ? Znowu pojawia się pewien kształt, który makroskopowo wygląda tak samo dla dużych  $m$ . Jednakże w tym przypadku widzimy dwa bąbelki zamiast jednego (rys. 6). Dalsze eksperymentowanie sugeruje hipotezę, że funkcja typu  $n \mapsto kn$ , gdzie  $k$  jest liczbą naturalną, ma  $(k-1)$ -bąbelkowy wykres (rys. 7 ilustruje przypadek  $k = 4$ ).



Rys. 6. Wykres  $n \mapsto 3n$  w  $Z_{200}$ . Tym razem widzimy dwa bąbelki.

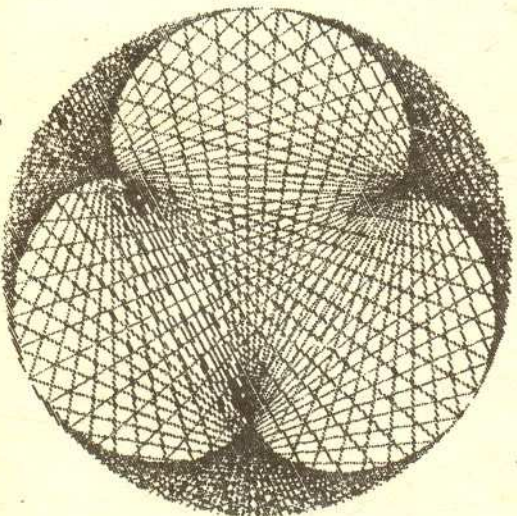
Badanie modularnych bąbelków będziemy kontynuować używając odtąd metod analitycznych. Spróbujemy odpowiedzieć na pytanie, czym właściwie jest „krzywa bąbelkowa”, którą widzimy na wykresie funkcji  $n \mapsto kn$ .

Niezmienniczość względem  $m$  wykresów funkcji  $n \mapsto kn$  sugeruje „uciąglenie” procesu ich rysowania. Tarczę naszego  $m$ -godzinnego zegara możemy traktować jak okrąg jednostkowy na płaszczyźnie. Każdemu punktowi  $a$  tego okręgu przyporządkujemy kąt  $\theta_a$ .



Rys. 8.

Aby otrzymać zgodność z naszymi zegarowymi wykresami, płaszczyznę orientujemy zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara (a nie przeciwnie, jak nakazuje matematykom tradycja). Łatwo zauważyć, że niezależnie od wartości  $m$ , pomnożenie godziny  $n$  ( $n = 0, 1, \dots, m-1$ ) przez  $k$  odpowiada pomnożeniu przyporządkowanego jej kąta  $\theta$  przez  $k$ . (Uwaga: samo przyporządkowanie kąta zależy od  $m$ .) Tak więc połączenie odcinkiem godziny  $n$  z godziną  $kn$  jest równoważne połączeniu odcinkiem punktu odpowiadającego kątowi  $\theta$  z punktem odpowiadającym kątowi  $k\theta$  (nie będzie nam przeszkadzać, jeśli  $k\theta$  przekroczy  $2\pi$ ). Możemy sobie wyobrazić, że każdy punkt  $a$  okręgu jednostkowego łączymy odcinkiem z punktem odpowiadającym kątowi  $k\theta_a$ . Powstały w ten sposób wykres zawierałby wszystkie wykresy  $n \mapsto kn$  (dla wszystkich  $m$  przy ustalonym  $k$ ).



Rys. 7.  $n \mapsto 4n$  w  $Z_{200}$ , 3 bąbelki. Hipoteza:  $n \mapsto kn$  daje  $k-1$  bąbelków.

Wróćmy teraz do naszego głównego pytania. Widzimy, iż nasza krzywa bąbelkowa to raczej łamana wyznaczona przez punkty przecięcia odcinków z sąsiadującymi odcinkami. Przy zwiększaniu  $m$  łamana ta się wygładza. Znaczy to, że gdy sąsiadujące odcinki zbliżają się do siebie, łamane wyznaczone przez ich punkty przecięcia coraz dokładniej przybliżają nam pewną idealną krzywą. Tą idealną krzywą jest zbiór „granicznych punktów przecięcia”. Pokażemy, że gdy kąt  $\varphi$  zmierza do ustalonego kąta  $\theta$ , to punkt przecięcia odpowiadających im odcinków  $S_\varphi$  (odc. łączący  $\varphi$  z  $k\varphi$ ) i  $S_\theta$  (odc. łączący  $\theta$  z  $k\theta$ ) zmierza do pewnego punktu płaszczyzny  $P(\theta)$ , który nazwalibyśmy granicznym punktem przecięcia.

Współrzędne prostokątne  $(x, y) = (x(\varphi, \theta), y(\varphi, \theta))$  punktu przecięcia odcinków  $S_\varphi$  i  $S_\theta$  można obliczyć z układu równań:

$$\begin{cases} x(\cos \varphi - \cos k\varphi) - y(\sin \varphi - \sin k\varphi) = \sin((k-1)\varphi) \\ x(\cos \theta - \cos k\theta) - y(\sin \theta - \sin k\theta) = \sin((k-1)\theta) \end{cases}$$

Współrzędne punktu  $P(\theta)$  są granicami  $x$  i  $y$ , przy  $\varphi \rightarrow \theta$ .

Względnie prosty, lecz trochę przydługi rachunek (reguła de l'Hospitala i tożsamości trygonometryczne) pokazuje nam, że te granice istnieją i wynoszą:

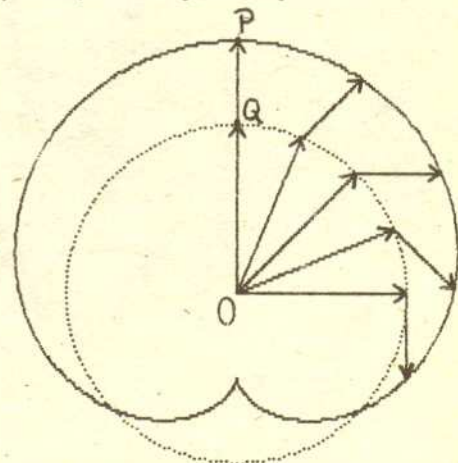
$$\begin{cases} x_P = (k \sin \theta + \sin k\theta)/(k+1) \\ y_P = (k \cos \theta + \cos k\theta)/(k+1) \end{cases}$$

Powyzsze wzory to równanie parametryczne naszej krzywej bąbelkowej, dla parametru  $\theta \in [0, 2\pi)$ .

Wykreślając krzywe odpowiadające różnym wartościom  $k$  zauważamy, iż rzeczywiście zgadzają się z tym, co widzimy na zegarowych wykresach (rys. 9 – 11 ilustrują przypadki  $k = 2, 3, 4$ ).

Otrzymane równanie parametryczne można zinterpretować w następujący sposób: Krzywa bąbelkowa jest zakresłana przez punkt  $P$  obracający się zgodnie z ruchem wskazówek zegara dookoła punktu  $Q$  (z prędkością kątową  $k$  po okręgu o promieniu  $1/(k+1)$ ), przy czym punkt  $Q$  obraca się dookoła stacjonarnego punktu  $O$  (z prędkością kątową 1, po okręgu o promieniu  $k/(k+1)$ ) (rys. 12). Ta obserwacja klasyfikuje krzywe bąbelkowe jako krzywe epicykliczne.

Rys. 12. Punkt  $P$  porusza się dookoła punktu  $Q$  (z prędkością kątową 2, po okręgu o promieniu  $1/3$ ); sam punkt  $Q$  porusza się dookoła stacjonarnego punktu  $O$  (z prędkością kątową 1, po okręgu o promieniu  $2/3$ ). W ten sposób punkt  $P$  zakresła krzywą bąbelkową dla  $k = 2$ .

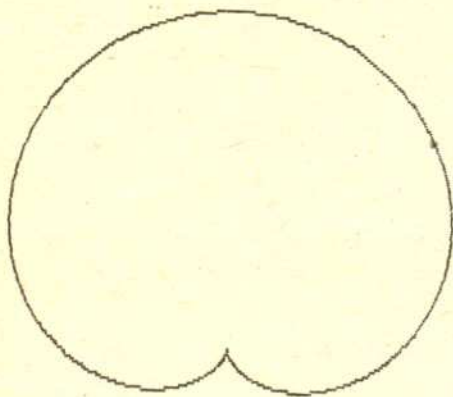


Możemy także podać intuicyjno-teoriolizbowe uzasadnienie faktu, że liczba bąbelków wynosi  $k-1$ . Zauważmy, że każdemu bąbelkowi odpowiada jeden wektor  $S_\theta$  mający ten sam kierunek i zwrot, co promień okręgu jednostkowego. Ma to miejsce, gdy  $(k\theta - \theta - \pi) = 2q\pi$ , dla pewnej liczby naturalnej  $q$ , co jest równoważne temu, że  $\theta = \pi/(k-1) + q2\pi/(k-1)$ . Z tego równania widzimy, że otrzymamy  $k-1$  różnych wartości  $\theta$  dla  $q = 0, \dots, (k-2)$ .

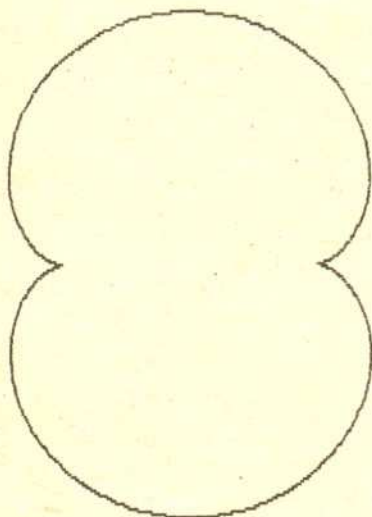
Możemy teraz zapytać, jak wygląda wykres funkcji liniowej  $n \mapsto kn + p$ . Łatwo jest uogólnić otrzymane rezultaty i pokazać, że „zmierza” on do normalnej krzywej bąbelkowej, gdy  $m \rightarrow \infty$ .

Na zakończenie zauważmy analogię między wykresem zegarowym i kołem jednostkowym na płaszczyźnie zespolonej. Łączenie godzin z ich wielokrotnościami odpowiada łączeniu liczb zespolonych z ich potęgami.

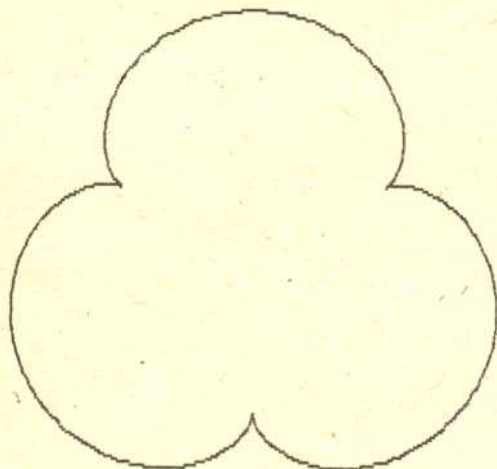
W tym artykule badaliśmy wykresy zegarowe funkcji liniowych. Jak wyglądają wykresy zegarowe innych funkcji? Ten problem pozostawiamy Czytelnikowi.



Rys. 9. Krzywa bąbelkowa dla  $k = 2$ , wykreślona na podstawie otrzymanego równania parametrycznego.



Rys. 10. Krzywa bąbelkowa dla  $k = 3$ .



Rys. 11. Krzywa bąbelkowa dla  $k = 4$ .