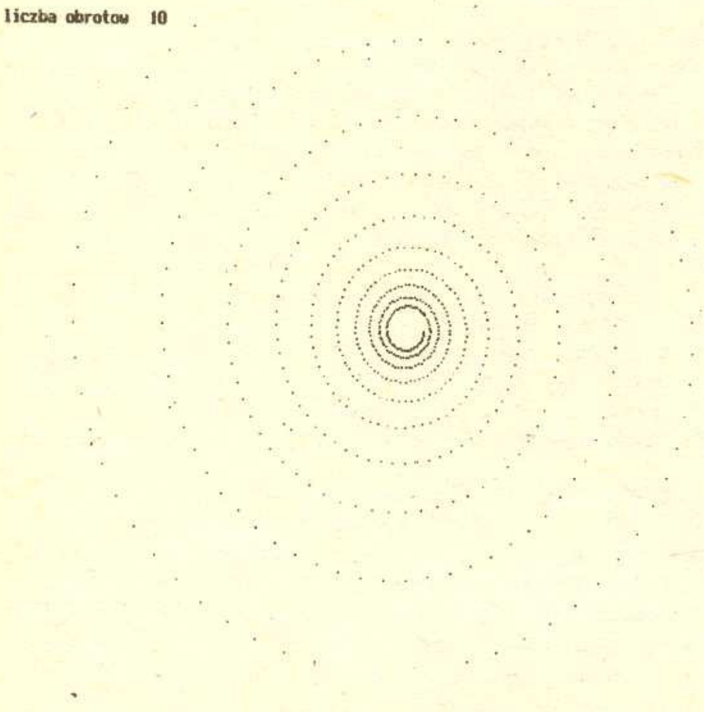
Okrąg



Rys. 1

Numeryczne rozwiązywanie równań różniczkowych kryje wiele niespodzianek.

Okrąg o środku w punkcie $(0,0)$ i promieniu R to zbiór punktów $(R\cos\varphi, R\sin\varphi)$, gdzie $\varphi \in [0, 2\pi]$. Traktując współrzędne x i y punktów okręgu jako funkcje zmiennej φ i różniczkując otrzymujemy:

$$x'(\varphi) = -R\sin\varphi = -y(\varphi)\,,$$
$$y'(\varphi) = R\cos\varphi = x(\varphi)\,.$$

Jeśli chcemy narysować rozwiązanie tego układu równań na ekranie komputera, to najprościej zamienić równania różniczkowe na równania różnicowe

$$x_{n+1} = x_n - hy_n\,,$$
$$y_{n+1} = y_n + hx_n\,,$$

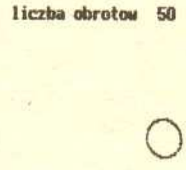
przy warunku początkowym $x_0 = R$ i $y_0 = 0$, a następnie rysować otrzymane punkty.

Na rysunku 1 widzimy wynik dla kroku $h = 0,1$. Niezupełnie to, co chcieliśmy. Dla $h = 0,01$ niewiele lepiej – rysunek 2. Wystarczy jednak maleńka zmiana

$$x_{n+1} = x_n - hy_n\,,$$
$$y_{n+1} = y_n + hx_{n+1}$$

i wynik jest idealny – rysunek 3.

Rys. 2



Rys. 3

Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego

KORESPONDENCYJNY KLUB FIZYKÓW

Drodzy Członkowie i Sympatycy Klubu!
Przypominamy, że co miesiąc przyznajemy nagrodę książkową dla autora najciekawiej opracowanego rozwiązania postawionych zagadnień. A oto nowa seria propozycji:

1. Zbadaj, jak zależy wysychanie tkaniny od wilgotności względnej powietrza, od temperatury otoczenia i od ruchów powietrza. W tym celu wybierz „wzorcowy" kawałek płótna, np. 1 dcm^2 starego prześcieradła i badaj zależność czasu wysychania od różnych czynników. W tym prostym, a praktycznym doświadczeniu możesz wykazać się dużą pomysłowością i naukowym podejściem do zagadnienia. Jest jedno „ale". W jaki sposób wyznaczać wilgotność powietrza? W tym celu musimy zbudować urządzenie do pomiaru wilgotności. Będzie to tak zwany psychrometr (inaczej: higrometr).

Tablica psychrometryczna względnej wilgotności powietrza w %

t_s (°C)	$t_s - t_m$ (°C)									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	100	88	76	65	54	44	34	24	14	4
12	100	89	78	68	57	48	38	29	20	11
14	100	90	79	70	60	51	42	33	25	17
16	100	90	81	71	62	54	45	37	30	22
18	100	91	82	73	64	56	48	41	34	26
20	100	91	83	74	66	59	51	44	37	30
22	100	92	83	76	68	61	54	47	40	34
24	100	92	84	77	69	62	56	49	43	37
26	100	92	85	78	71	64	58	50	45	40
28	100	93	85	78	72	65	59	53	48	42
30	100	93	86	79	73	67	61	55	50	44

2. Budujemy psychrometr.
Najpierw definicja wilgotności: *Wilgotność względna ϕ (może być wyrażona w procentach) jest to stosunek obecnej w danej temperaturze masy pary wodnej f do masy pary wodnej f_0, która byłaby obecna, gdyby para wodna przy tej temperaturze była nasycona $\phi = f/f_0$.*
Do budowy psychrometru wykorzystamy zjawisko ochładzania przez parowanie mokrej powierzchni. Postarajmy się o dwa jednakowe termometry pokojowe. Bańkę jednego z nich owijamy tkaniną (może to być jedwab, batyst, itp.), której koniec zanurzony jest w naczyniu z wodą. W ten sposób bańka tego termometru będzie stale wilgotna. Termometr „mokry" pokaże zawsze niższą temperaturę (chłodzenie wynikające z parowania) niż termometr „suchy". Byłoby dobrze, gdyby termometry znajdowały się stale w strumieniu powietrza, na przykład w pobliżu wentylatora, aby w ich otoczenie napływało stale powietrze z badanego obszaru. Jeżeli dopuścimy, aby powietrze było stojące, to, oczywiście, wilgotność w pobliżu mokrego termometru wzrośnie i zafałszuje wyniki. Gdy ustalą się wskazania mokrego termometru, należy odczytać wskazania obu termometrów $t_{s(uchy)}$, $t_{m(okry)}$ i z zamieszczonej tabelki odczytać względną wilgotność powietrza. (Tak wyznaczona wilgotność jest obarczona pewnym niewielkim błędem, ponieważ nie uwzględniamy panującego ciśnienia atmosferycznego.)

Redaguje doc. dr Tomasz HOFMOKL

Listy prosimy przysyłać pod adresem:
Korespondencyjny Klub Fizyków
Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego
ul. Hoża 69, 00-681 Warszawa.

Czy bukmacher może przyjmować zakłady od samego siebie?

Prof. dr Bolesław KOPOCIŃSKI

Bukmacher kojarzy się nam zwykle z angielskim hazardzistą, który ryzykując własnym kapitałem przyjmuje karkołomne zakłady. Czy przyjmuje je od samego siebie? Grającym jest to raczej obojętne. Ale bukmacherem jest także pośrednik w grze w totalizatora, człowiek, który nie angażując własnego kapitału organizuje grę innych. Zazwyczaj grający utrzymują wzajemnie w tajemnicy swoje typy, ale poznaje je wszystkie bukmacher. Powstaje więc obawa, że biorąc udział w grze wykorzysta on te informacje na szkodę współgrających. Pokażemy teraz na przykładzie gry *orzeł czy reszka*, jak wielkie korzyści może on przy tym uzyskać.

Gra *orzeł czy reszka* jest dość nudną formą hazardu, ale stanowi wdzięczny przedmiot rozważań matematycznych. W grze dwóch osób jedna rzuca monetą, a druga odgaduje wynik. Odgadując wygrywa stawkę, nie odgadując – przegrywa. Gdy w grze uczestniczy kilka osób, bukmacher zbiera typy, rzuca monetą i dzieli zebraną pulę między wygrywających (ewentualnie zwraca stawki, gdy nikt nie wygrał). Gra jest sprawiedliwa, każdy ma zapewnioną oczekiwaną wygraną w wysokości stawki.

Pozwólmy teraz bukmacherowi zagrać wraz z innymi. Oczywiście, nie stara się on przewidzieć wyniku rzutu monetą, ale postara się manipulować wysokością wypłat. Optymalna strategia bukmachera jest prosta: jeśli większość grających stawia na orła, to on stawia na reszkę, jeśli przeciwnie, to on stawia na orła. W rezultacie, przy rzucie idealną monetą, bukmacher wygrywa z taką samą częstością jak inni, ale zawsze, gdy wygrywa, pula jest dzielona między małą liczbę wygrywających, a więc wygrane są wysokie.

Przy równej liczbie typów na orła i na reszkę bukmacherowi, jak się to później okaże, nie opłaca się grać. Przymuszony do gry może typować z jednakowym skutkiem na orła lub reszkę; powiedzmy więc, że stawia wtedy zawsze na orła.

Niech n będzie liczbą grających i X oznacza liczbę osób stawiających na orła. Gdy zdarzy się, że $X = k$ i k jest małe, tzn. $k = 0, 1, \ldots, [\frac{n}{2}]$ (przez $[x]$ oznaczamy część całkowitą liczby x), wówczas wygrana bukmachera wynosi $\frac{n+1}{k+1}$, ale, oczywiście, tylko wtedy, gdy w rzucie monetą padnie orzeł; wygrana wyniesie 0, gdy padnie reszka. Średnio zysk, po odliczeniu stawki, wyniesie więc $\frac{1}{2}\frac{n+1}{k+1} - 1$. Podobnie analizujemy sytuację przy dużym k i otrzymujemy wzór na zyski bukmachera:

$$Z_{n,k} = \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{n+1}{k+1} - 1, & \text{jeśli } k = 0, 1, \ldots, [\frac{n}{2}], \\ \frac{1}{2}\frac{n+1}{n-k+1} - 1 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Aby określić, jak często pojawia się zdarzenie $X = k$, przyjmijmy, że grający z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ typują orła lub reszkę i czynią to niezależnie jeden od drugiego. Wówczas to zdarzenie ma prawdopodobieństwo dwumianowe $\binom{n}{k}(\frac{1}{2})^n$. Oczekiwana wygrana bukmachera wynosi

$$Z_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n Z_{n,k}.$$

Po przekształceniu otrzymujemy

$$Z_n = \binom{n+1}{[\frac{n}{2}]+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

czyli tzw. wyraz środkowy w rozkładzie dwumianowym dla $n+1$ prób pomniejszony o wyrazy skrajne. Gdy zmieniamy n, wówczas największą wartość wygranej uzyskujemy przy $n = 5$ i wynosi ona $Z_5 = 0,281$. Asymptotycznie $Z_n \approx \sqrt{\frac{2}{\pi n}}$, gdy $n \to \infty$. Zauważmy, że $Z_n \to 0$, gdy $n \to \infty$.

Bukmacher może próbować zwiększyć zysk zwielokrotniając swój udział w grze lub wstrzymując się czasami od gry. Przypuśćmy, że stawia on $r = r(k)$ razy na orła, gdy $X = k$ i k jest małe i tyleż razy na reszkę, gdy $X = n - k$ i k jest małe.

Rozwiązanie zadania F 284.
Strumień magnetyczny Φ przenikający przez powierzchnię otoczoną konturem nadprzewodzącym jest stały, ponieważ siła elektromotoryczna indukcji

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = RI = 0, \text{ (bowiem } R = 0).$$

Przy spadaniu ramki strumień przenikający ją wynosi

$$\Phi = a^2 B_0 + a^2 \alpha z + LI,$$

ale ponieważ $\Phi = const$, więc

$$LI = -\alpha z a^2,$$

czyli

$$I = -\frac{\alpha z a^2}{L}.$$

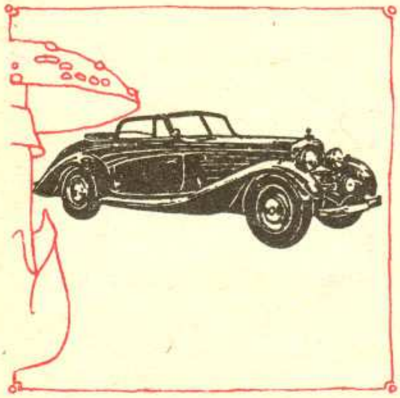
Siła wypadkowa działająca na ramkę z prądem I wynosi

$$F = a^2 \alpha I = -\frac{a^4 \alpha^2 z}{L}$$

i skierowana jest wzdłuż osi z.
Równanie ruchu ramki

$$m\ddot{z} = -mg - \frac{a^4 \alpha^2 z}{L}.$$

Ruch będzie podobny do ruchu masy zawieszonej na sprężynie w polu grawitacyjnym. Ramka będzie wykonywać drgania harmoniczne o częstości $\omega = \frac{a^2\alpha}{\sqrt{Lm}}$ wokół położenia równowagi $z_0 = -\frac{mgL}{a^4\alpha^2}$.



Rozwiązanie zadania F 285.
Indukcja B pola magnetycznego wewnątrz walca jest równa zeru, na zewnątrz, w pobliżu powierzchni wynosi $B = \mu_0 I/(2\pi R)$. Ciśnienie wywierane przez pole magnetyczne, jakie działa na ten walec, jest równe

$$p_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 R^2}.$$

Podstawiając wartości liczbowe otrzymujemy $p_m \cong 6,4 \times 10^4$ N/m^2. A więc w naszym przypadku $p_m < p$ (p – ciśnienie wewnętrzne w plazmie), co oznacza, że plazma będzie się rozszerzać. Warunek równowagi $p_m = p$ nastąpi przy przepływie prądu o natężeniu $I = 1,25 \times 10^5$ A.